

Exercice 1 : Le rectangle équivalent

5 points

Question ouverte : on attend une démarche complète et rédigée. Voici une solution possible.

L'aire sous la courbe de f sur $[0; 4]$ est l'intégrale de f sur cet intervalle. Une primitive de x^2 est $\frac{x^3}{3}$, donc

$$\int_0^4 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^4 = \frac{64}{3} - 0 = \frac{64}{3}.$$

Le rectangle de base $[0; 4]$ et de hauteur h a pour aire $4h$. Pour que les deux aires coïncident :

$$4h = \frac{64}{3} \quad \text{donc} \quad h = \frac{16}{3} \approx 5,33.$$

Ce que représente cette hauteur. C'est la valeur moyenne de f sur $[0; 4]$: par définition,

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{4} \times \frac{64}{3} = \frac{16}{3}.$$

Autrement dit, la valeur moyenne est exactement la hauteur du rectangle qui a la même base et la même aire que le domaine sous la courbe. Le technicien a raison, et une telle hauteur existe toujours dès que la fonction est continue.

Contrôle de vraisemblance : sur $[0; 4]$, f varie de 0 à 16. Une moyenne de 5,33 est bien comprise entre ces deux valeurs – et plus proche du bas, ce qui est normal puisque x^2 croît lentement au début.

Exercice 2 : QCM

6 points

1) **Réponse B.** Une primitive de $4x^3$ est x^4 , donc

$$\int_1^2 4x^3 dx = [x^4]_1^2 = 16 - 1 = \boxed{15}.$$

La proposition **C** correspond à l'oubli de la borne inférieure.

2) **Réponse C.** Par la relation de Chasles :

$$\int_0^5 f = \int_0^3 f + \int_3^5 f = 10 + (-4) = \boxed{6}.$$

La proposition **A** additionne les valeurs absolues; la **D** ignore que Chasles s'applique sans qu'on ait besoin de connaître f .

3) **Réponse D.** Les bornes sont *dans l'ordre décroissant*. Par définition $\int_2^0 = -\int_0^2$, et $\int_0^2 5 dx = 5 \times 2 = 10$, donc

$$\int_2^0 5 dx = \boxed{-10}.$$

La proposition **A** oublie l'inversion des bornes : c'est le piège de la question. Une intégrale peut être négative alors même que la fonction est positive, dès que $a > b$.

Exercice 3 : L'énergie consommée par un atelier

9 points

1) $P(0) = 1$ kW et $P(8) = -0,1 \times 64 + 6,4 + 1 = -6,4 + 7,4 = 1$ kW. Les deux valeurs sont égales : l'atelier appelle la même puissance à l'ouverture et à la fermeture.

- 2) $P'(t) = -0,2t + 0,8$, qui s'annule pour $t = \frac{0,8}{0,2} = 4$, en passant du positif au négatif. P croît donc puis décroît : le maximum est atteint en $t = 4 \text{ h}$ et vaut

$$P(4) = -1,6 + 3,2 + 1 = 2,6 \text{ kW}.$$

- 3) On intègre terme à terme :

$$F(t) = -\frac{t^3}{30} + 0,4t^2 + t.$$

$$\text{Contrôle : } F'(t) = -\frac{3t^2}{30} + 0,8t + 1 = -0,1t^2 + 0,8t + 1 = P(t).$$

- 4) $F(8) = -\frac{512}{30} + 25,6 + 8 = -\frac{256}{15} + \frac{504}{15} = \frac{248}{15}$ et $F(0) = 0$, donc

$$\int_0^8 P(t) dt = \frac{248}{15} \approx 16,53 \text{ kWh}.$$

- 5) Puissance moyenne : $\frac{1}{8} \times \frac{248}{15} = \frac{31}{15} \approx 2,07 \text{ kW}.$

Elle est nettement inférieure au maximum de 2,6 kW – l'écart vient de ce que la puissance n'atteint son pic qu'au milieu de la journée.

- 6) Coût = $0,18 \times \frac{248}{15} \approx 0,18 \times 16,533 \approx 2,98 \text{ €}$ par journée de fonctionnement.

- 7) **Non, l'abonnement n'est pas suffisant.** Il limite la puissance à 2,5 kW, or la puissance appelée atteint 2,6 kW au bout de 4 heures : le seuil est dépassé au milieu de la journée.

Il ne suffit pas que la *moyenne* (2,07 kW) reste sous le seuil : c'est le *maximum* qui déclenche la coupure. L'atelier pourrait décaler une machine d'une heure ou deux pour aplatir le pic, sans réduire sa production ni changer d'abonnement.