

Exercice 1 : La vitesse moyenne du vent

6 points

- 1) $v(0) = -0,25 \times 0 + 0 + 3 = \boxed{3}$ et $v(8) = -0,25 \times 64 + 16 + 3 = -16 + 19 = \boxed{3}$. Les deux valeurs du document 1 sont exactes.
- 2) **Non, la note n'est pas recevable.** Le document 1 donne $v(4) = 7$ m/s : au milieu de la journée, le vent souffle plus de deux fois plus fort qu'aux extrémités. Une moyenne de 3 m/s est donc impossible.
L'erreur consiste à moyenner les deux bornes au lieu de moyenner la fonction sur tout l'intervalle.
- 3) Avec la primitive donnée :

$$\int_0^8 v(t) dt = F(8) - F(0).$$

$$\text{Or } F(8) = -\frac{512}{12} + 64 + 24 = -\frac{128}{3} + 88 = \frac{-128 + 264}{3} = \frac{136}{3} \text{ et } F(0) = 0. \text{ Donc}$$

$$\boxed{\int_0^8 v(t) dt = \frac{136}{3} \approx 45,33}.$$

- 4) La valeur moyenne d'une fonction sur $[a; b]$ vaut $\frac{1}{b-a} \int_a^b f$. Ici

$$\frac{1}{8} \times \frac{136}{3} = \frac{17}{3} \approx \boxed{5,67 \text{ m/s}}.$$

La vitesse moyenne réelle est donc près du double des 3 m/s annoncés. La conclusion « ce site est peu venté » n'est pas fondée : elle repose sur une moyenne calculée de travers.

Exercice 2 : Calculs d'intégrales

8 points

- 1) Une primitive de $2x + 1$ est $x^2 + x$, donc

$$\int_0^3 (2x + 1) dx = [x^2 + x]_0^3 = (9 + 3) - 0 = \boxed{12}.$$

Par l'aire : la courbe est la droite d'équation $y = 2x + 1$, qui vaut 1 en 0 et 7 en 3. Le domaine est un trapèze de bases 1 et 7 et de hauteur 3 :

$$\mathcal{A} = \frac{1+7}{2} \times 3 = 12.$$

Les deux méthodes coïncident, comme l'annonce le cours pour une fonction affine.

- 2) Une primitive de $3x^2$ est x^3 : $\int_0^2 3x^2 dx = [x^3]_0^2 = 8 - 0 = \boxed{8}$.

- 3) Une primitive de $\frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$ est $\ln(x)$:

$$\int_1^e \frac{1}{x} dx = [\ln(x)]_1^e = \ln(e) - \ln(1) = 1 - 0 = \boxed{1}.$$

Ce résultat est une autre façon de définir le nombre e : c'est le réel pour lequel cette aire vaut exactement 1.

- 4) $e^{-0,2x}$ est de la forme $f(ax + b)$; une primitive est $\frac{e^{-0,2x}}{-0,2} = -5e^{-0,2x}$. Donc

$$\int_0^{10} e^{-0,2x} dx = [-5e^{-0,2x}]_0^{10} = -5e^{-2} + 5 = \boxed{5 - 5e^{-2}} \approx \boxed{4,323}.$$

5) La valeur moyenne vaut $\frac{1}{2-0} \int_0^2 3x^2 dx = \frac{8}{2} = \boxed{4}$.

Interprétation : le rectangle de base $[0; 2]$ et de hauteur 4 a pour aire $2 \times 4 = 8$ – exactement l'aire sous la courbe. La valeur moyenne est la hauteur du rectangle de même aire.

Exercice 3 : Vrai ou faux

6 points

1) **Vraie.** C'est la *définition* de l'intégrale pour une fonction positive : l'aire sous la courbe, mesurée en unités d'aire.

2) **Fausse.** C'est vrai pour une fonction positive, mais une fonction négative donne une intégrale négative.

Contre-exemple : $\int_0^1 (-2) dx = [-2x]_0^1 = \boxed{-2}$.

L'aire, elle, reste positive : c'est l'intégrale qui porte le signe.

3) **Vraie.** C'est la relation de Chasles, valable quel que soit l'ordre de a, b et c – y compris si b n'est pas entre a et c , puisque $\int_a^b = -\int_b^a$.

4) **Fausse.** La valeur moyenne vaut $\frac{1}{b-a} \int_a^b f$, et non la demi-somme des valeurs aux bornes.

Contre-exemple : c'est exactement l'erreur du document 2 de l'exercice 1. La fonction v y vaut 3 en 0 et 3 en 8, ce qui donnerait 3; sa vraie moyenne vaut $\frac{17}{3} \approx 5,67$.

Les deux ne coïncident que pour une fonction *affine* – c'est ce qui rend l'erreur si tentante.