

Exercice 1 : Vrai ou faux

6 points

- 1) **Vraie.** C'est une propriété du cours :

la droite des moindres carrés passe toujours par $G(\bar{x}; \bar{y})$.

C'est le contrôle le plus rapide d'un ajustement : si la droite trouvée ne passe pas par le point moyen, il y a une erreur.

- 2) **Fausse.** Un ajustement affine est *toujours* calculable — la calculatrice rendra une droite quel que soit le nuage. La question n'est pas s'il est *possible*, mais s'il est pertinent.

C'est précisément le cas de l'exercice 2 : les points ne sont pas alignés, une droite existe pourtant, mais elle décrirait mal la situation.

- 3) **Vraie.** En posant par exemple $z = \log(y)$, $u = x^2$ ou $v = \frac{1}{t}$, on obtient parfois un nuage sensiblement aligné dans les nouvelles variables. On ajuste alors ce nuage-là, puis on revient aux variables de départ.

- 4) **Fausse.** C'est exactement l'inverse :

plus on s'éloigne des mesures, moins l'extrapolation est fiable,

car rien ne garantit que le modèle reste valable hors de l'intervalle étudié.

Contre-exemple vu au sujet 1 : le ressort, dont le modèle affine cesse de valoir dès qu'on quitte le domaine élastique.

Exercice 2 : Le vieillissement d'une LED de signalisation

14 points

Partie A — Pourquoi l'ajustement affine ne convient pas

- 1) Les écarts successifs valent

$$87 - 100 = -13, \quad 76 - 87 = -11, \quad 66 - 76 = -10, \quad 57 - 66 = -9.$$

Ils ne sont pas constants : la perte de flux ralentit avec le temps. Une évolution affine donnerait au contraire des écarts égaux.

- 2) Les quotients successifs valent

$$\frac{87}{100} = 0,870, \quad \frac{76}{87} \approx 0,874, \quad \frac{66}{76} \approx 0,868, \quad \frac{57}{66} \approx 0,864.$$

Ils sont sensiblement constants, autour de 0,87 : d'une mesure à la suivante, le flux est multiplié par un même coefficient.

- 3) Un écart constant caractérise une évolution affine; un *quotient* constant caractérise une évolution exponentielle. Les données relèvent donc du second cas.

Un ajustement affine de y en t existerait, mais il sous-estimerait le flux aux temps longs et prédirait même un flux négatif au-delà d'une certaine durée — ce qui n'a aucun sens.

Partie B — Le changement de variable

4)

t	0	5	10	15	20
$z = \log(y)$	2,0000	1,9395	1,8808	1,8195	1,7559

Les écarts de z valent $-0,0605$, $-0,0587$, $-0,0613$ et $-0,0636$:

cette fois ils sont presque constants

Le nuage $(t; z)$ est donc aligné.

- 5) À la calculatrice, la droite d'ajustement de z en t a pour équation

$$z = -0,01216t + 2,0008,$$

que l'on arrondit en $z = 2 - 0,0122 t$.

6) De $z = \log(y)$ on tire $y = 10^z$. Donc

$$y = 10^{2-0,0122 t} = 10^2 \times 10^{-0,0122 t} = \boxed{100 \times 10^{-0,0122 t}}.$$

On retrouve bien une décroissance exponentielle, conforme au constat de la partie A.

7) Pour $t = 10$: $y = 100 \times 10^{-0,122} \approx \boxed{75,5 \text{ lumens}}$, à comparer à la mesure de 76 lumens. L'écart est de 0,5 lumen, soit moins de 1 % : $\boxed{\text{le modèle est de bonne qualité}}$.

Partie C – Exploitation

8) 70 % du flux initial, c'est 70 lumens. On résout :

$$100 \times 10^{-0,0122 t} = 70 \iff 10^{-0,0122 t} = 0,7 \iff -0,0122 t = \log(0,7).$$

Comme $\log(0,7) = \log(7) - \log(10) \approx -0,1549$, il vient

$$t = \frac{-0,1549}{-0,0122} \approx \boxed{12,70 \text{ milliers d'heures}},$$

soit environ 12 700 heures de fonctionnement garanti.

9) **Question ouverte.** On cherche t tel que le flux soit la moitié du flux initial. En notant y_0 ce flux initial et $y = y_0 \times 10^{-0,0122 t}$:

$$y_0 \times 10^{-0,0122 t} = \frac{y_0}{2} \iff 10^{-0,0122 t} = \frac{1}{2}.$$

$\boxed{\text{Le flux initial } y_0 \text{ se simplifie}}$: c'est la réponse à la seconde partie de la question. Il reste

$$-0,0122 t = \log\left(\frac{1}{2}\right) = -\log(2) \quad \text{donc} \quad t = \frac{\log(2)}{0,0122} \approx \boxed{24,67}.$$

Le flux est donc divisé par deux au bout d'environ 24 670 heures, soit presque le double de la durée garantie.

Pourquoi y_0 disparaît : le modèle est multiplicatif. Passer de y_0 à $\frac{y_0}{2}$, c'est multiplier par $\frac{1}{2}$, et ce facteur ne dépend pas du point de départ. C'est exactement la notion de *demi-vie* rencontrée au chapitre précédent — même structure, autre domaine.