

Exercice 1 : La droite d'étalonnage

8 points

$$1) \bar{c} = \frac{0 + 2 + 4 + 6 + 8 + 10}{6} = \frac{30}{6} = 5 \text{ et}$$

$$\bar{A} = \frac{0,00 + 0,17 + 0,33 + 0,51 + 0,67 + 0,84}{6} = \frac{2,52}{6} = 0,42.$$

Donc $G(5; 0,42)$.

2) À la calculatrice, la droite d'ajustement affine de A en c a pour équation

$$A = 0,084c + 0,000,$$

soit $A = 0,084c$ aux arrondis demandés près.

Contrôle : cette droite doit passer par G , et en effet $0,084 \times 5 = 0,42$.

3) Pour $c = 6$: le modèle donne $0,084 \times 6 = 0,504$, à comparer à la valeur mesurée 0,51. L'écart vaut 0,006, soit environ 1 % : le modèle est cohérent avec la mesure.

4) Une solution de concentration nulle ne contient pas de colorant : elle n'absorbe pas, son absorbance est nulle. Le point $(0; 0)$ appartient donc nécessairement au nuage, et il est logique que la droite passe par l'origine.

C'est d'ailleurs ce que confirme l'ajustement : l'ordonnée à l'origine trouvée est nulle aux arrondis près.

5) On résout $0,084c = 0,45$:

$$c = \frac{0,45}{0,084} \approx 5,36 \text{ mg/L}.$$

6) La norme impose $c < 5 \text{ mg/L}$. Or $5,36 > 5$: le prélèvement n'est pas conforme.

Le dépassement est modeste – environ 7 % – mais il est réel ; l'incertitude de mesure mériterait d'être estimée avant de conclure définitivement.

Exercice 2 : Deux notes de service

6 points

$$1) c = \frac{1,30}{0,084} \approx 15,5 \text{ mg/L. Le calcul du document 2 est exact.}$$

2) **Non, la note n'est pas recevable.** Le document 1 précise que l'étalonnage n'est valable que pour une absorbance comprise entre 0,05 et 0,90. Or la mesure vaut 1,30 : elle est hors du domaine de validité, et la droite ne s'y applique pas.

Le calcul est juste, mais il est fait avec un outil employé hors de son domaine – exactement la même faute que l'extrapolation du ressort au sujet 1.

3) Il faut ramener l'absorbance dans le domaine exploitable, donc diluer le prélèvement – par exemple au cinquième – refaire la mesure, puis multiplier la concentration trouvée par le facteur de dilution.

4) **Oui, on peut l'affirmer.** L'absorbance croît avec la concentration. Comme la mesure dépasse 0,90, la concentration dépasse nécessairement celle qui correspond à $A = 0,90$, soit

$$\frac{0,90}{0,084} \approx 10,7 \text{ mg/L}.$$

Or $10,7 > 5$: le rejet dépasse donc bien la norme.

Ce que l'on ne peut pas affirmer, c'est de combien : la valeur de 15,5 mg/L annoncée n'est pas justifiée. On sait que la norme est dépassée, on ignore l'ampleur du dépassement.

Exercice 3 : Chercher la meilleure droite

6 points

- 1) *ecart* représente la différence entre la valeur *mesurée* y_i et la valeur *prédite* par la droite, $ax_i + b$: c'est l'erreur commise par le modèle en ce point.

On l'élève au carré pour deux raisons : les écarts positifs et négatifs ne doivent pas se compenser – sans quoi une mauvaise droite pourrait donner un total nul –, et le carré *pénalise davantage les gros écarts* qu'une somme de valeurs absolues.

- 2) Avec $a = 0,02$ et $b = 0$, la droite prédit $0,02x$:

x	100	200	300	400	500
y mesuré	2,0	4,1	5,9	8,1	9,9
$0,02x$	2,0	4,0	6,0	8,0	10,0
écart	0	0,1	-0,1	0,1	-0,1

$$S = 0^2 + 0,1^2 + (-0,1)^2 + 0,1^2 + (-0,1)^2 = 4 \times 0,01 = 0,04.$$

- 3) La meilleure est celle qui minimise S . Le tableau donne 0,040 pour $(0,02 ; 0)$, contre 0,090, 0,100 et 0,230 pour les autres : c'est donc $(a ; b) = (0,02 ; 0)$, soit la droite $y = 0,02x$ – celle retenue au sujet 1.

4)

```
def meilleure(liste) :
    meilleur_couple = liste[0]
    meilleur_S = S(liste[0][0], liste[0][1])
    for couple in liste :
        valeur = S(couple[0], couple[1])
        if valeur < meilleur_S :
            meilleur_S = valeur
            meilleur_couple = couple
    return meilleur_couple
```

On reconnaît la recherche d'un minimum : une variable qui retient le meilleur résultat trouvé jusque-là, initialisée sur le *premier* élément de la liste et non sur 0.

- 5) **Non.** Le procédé ne compare que les couples *qu'on lui donne* : il renvoie le meilleur de la liste proposée, pas le meilleur possible.

Il existe une infinité de couples $(a ; b)$, et le minimum réel peut se trouver entre deux candidats testés – c'est la même limite que le balayage du nombre e rencontré au chapitre 4. Seule la calculatrice, qui applique la méthode des moindres carrés, donne la droite optimale.