

Exercice 1 : La notice et le technicien

6 points

- 1) La demi-vie divise l'activité par deux. Au bout de 8,02 jours :

$$\frac{400}{2} = \boxed{200 \text{ MBq}},$$

puis au bout de 16,04 jours, soit une seconde demi-vie :

$$\frac{200}{2} = \boxed{100 \text{ MBq}}.$$

- 2) **Non, le raisonnement est faux.** Au bout de 16,04 jours il reste encore $\boxed{100 \text{ MBq}}$, soit le quart de l'activité initiale — et non zéro.
- 3) L'erreur est d'additionner des pourcentages qui ne portent pas sur la même quantité. La première demi-vie fait perdre 50 % de l'activité *initiale*, soit 200 MBq. La seconde fait perdre 50 % de ce qui *reste*, soit 100 MBq seulement — pas 200.

$\boxed{\text{deux demi-vies divisent par } 2 \times 2 = 4, \text{ elles ne retirent pas } 50 \% + 50 \%}$.

C'est le même mécanisme que pour les taux d'évolution : les coefficients multiplicateurs se *multiplient*, les pourcentages ne s'additionnent pas.

- 4) Une note correcte serait par exemple :
« La demi-vie étant de 8,02 jours, l'activité est divisée par deux tous les huit jours environ : il restera 200 MBq au bout de 8 jours, 100 MBq au bout de 16 jours, et elle ne s'annulera jamais complètement. La source restera utilisable tant que son activité dépasse le seuil fixé ; la mise au rebut doit être décidée à partir de ce seuil, et non d'un nombre de demi-vies. »

Exercice 2 : Décroissance d'une source radioactive

14 points

Partie A — Déterminer la constante

- 1) $A(0) = 400 e^{-k \times 0} = 400 e^0 = 400 \times 1 = \boxed{400 \text{ MBq}}$, ce qui est bien l'activité à la livraison.
- 2) « La demi-vie vaut 8,02 jours » signifie qu'au bout de ce temps l'activité est la moitié de l'activité initiale :

$$A(8,02) = \frac{400}{2} = 200, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \boxed{400 e^{-8,02 k} = 200}.$$

- 3) On simplifie par 400, puis on applique le logarithme :

$$e^{-8,02 k} = \frac{1}{2} \iff -8,02 k = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2),$$

d'où

$$\boxed{k = \frac{\ln(2)}{8,02}} \approx \boxed{0,08643}.$$

Le signe : $\ln\left(\frac{1}{2}\right)$ est négatif, ce qui donne bien un k positif — cohérent avec une décroissance.

Partie B — Étude et exploitation

- 4) $(e^{-kt})' = -k e^{-kt}$, donc

$$\boxed{A'(t) = -400 k e^{-kt}} = -34,57 e^{-0,08643 t}.$$

L'exponentielle étant strictement positive et $400k > 0$, on a $A'(t) < 0$ pour tout $t \geq 0$: A est $\boxed{\text{strictement décroissante}}$.

Interprétation : l'activité de la source diminue continûment — elle ne remonte jamais.

- 5) $A(30) = 400 e^{-0,08643 \times 30} = 400 e^{-2,5929} \approx \boxed{29,9 \text{ MBq}}$.

6) On résout $A(t) = 40$:

$$400 e^{-kt} = 40 \iff e^{-kt} = \frac{1}{10} \iff -kt = -\ln(10) \iff t = \frac{\ln(10)}{k}.$$

Numériquement, $t = \frac{2,3026}{0,08643} \approx 26,64 \text{ jours}$.

Contrôle de cohérence : 26,64 jours, c'est un peu plus de trois demi-vies ($3 \times 8,02 = 24,06$), qui laisseraient 12,5 % — on est bien en dessous.

7) Quand $t \rightarrow +\infty$, $-kt \rightarrow -\infty$ donc $e^{-kt} \rightarrow 0$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} A(t) = 0.$$

Non, l'activité ne peut pas devenir nulle : $A(t) = 0$ exigerait $e^{-kt} = 0$, or l'exponentielle est strictement positive. L'activité tend vers zéro sans jamais l'atteindre — ce qui confirme définitivement l'erreur du technicien.

Partie C — Comparer deux sources

8) **Question ouverte.** On cherche t tel que $B(t) = 0,10 \times 400 = 40$, en posant $k_T = \frac{\ln(2)}{T}$:

$$400 e^{-k_T t} = 40 \iff e^{-k_T t} = \frac{1}{10} \iff -k_T t = -\ln(10) \iff t = \frac{\ln(10)}{k_T}.$$

En remplaçant k_T par son expression :

$$t = \frac{\ln(10)}{\frac{\ln(2)}{T}} = T \times \frac{\ln(10)}{\ln(2)}.$$

Le résultat est donc *proportionnel à la demi-vie*, avec un coefficient universel $\frac{\ln(10)}{\ln(2)} \approx 3,32$ — qui ne dépend ni de la source, ni de l'activité initiale. Autrement dit :

$$\text{il faut toujours environ } 3,32 \text{ demi-vies pour tomber à } 10 \text{ \%}.$$

Vérification sur la partie B : $8,02 \times 3,32 \approx 26,6$ jours, ce qui redonne bien le résultat trouvé.

Application : pour une source de demi-vie 30 jours,

$$t = 30 \times 3,32 \approx 99,7 \text{ jours},$$

soit un peu plus de trois mois d'utilisation — contre moins d'un mois pour l'iode 131.