

Exercice 1 : QCM

6 points

1) Réponse B.

Les deux membres sont strictement positifs, on peut appliquer le logarithme, qui est strictement croissant :

$$e^{-0,2x} < 0,1 \iff -0,2x < \ln(0,1) \iff x > \frac{\ln(0,1)}{-0,2}.$$

Le sens de l'inégalité s'inverse en divisant par $-0,2$, qui est négatif – c'est le piège de la question. Enfin $\ln(0,1) = \ln\left(\frac{1}{10}\right) = -\ln(10)$, donc

$$x > \frac{-\ln(10)}{-0,2} = 5 \ln(10) \approx 11,51.$$

L'ensemble des solutions est $]5 \ln(10); +\infty[$. La réponse A correspond à l'oubli de l'inversion.

2) Réponse D.

C'est un quotient, avec $u(x) = \ln(x)$ et $v(x) = x$, donc $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v'(x) = 1$:

$$g'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x) \times 1}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

La réponse A inverse le numérateur, la C se trompe de signe.

3) Réponse C.

Par définition, $\ln(e^a) = a$ pour tout réel a . Donc

$$\ln(e^4) - \ln(e^2) = 4 - 2 = 2.$$

On peut aussi passer par le quotient : $\ln\left(\frac{e^4}{e^2}\right) = \ln(e^2) = 2$.

Exercice 2 : La copie d'un élève

4 points

1) L'élève a cru pouvoir écrire $\ln(a) + \ln(b) = \ln(a+b)$. **Cette propriété n'existe pas.** La vraie propriété est

$$\ln(a) + \ln(b) = \ln(a \times b).$$

Le logarithme transforme les *produits* en sommes – c'est l'inverse de ce qu'il a fait.

2) Pour $x = 3,5$:

$$\ln(3,5) + \ln(6,5) \approx 1,253 + 1,872 = 3,125 \quad \text{alors que} \quad \ln(10) \approx 2,303.$$

Les deux membres ne sont pas égaux : $x = 3,5$ n'est pas solution.

3) L'équation n'a de sens que si $x > 0$ et $x + 3 > 0$, donc sur $]0; +\infty[$.

En utilisant la bonne propriété :

$$\ln(x) + \ln(x + 3) = \ln(x(x + 3)),$$

donc l'équation devient $\ln(x(x + 3)) = \ln(10)$. La fonction $\ln$ étant strictement croissante, elle ne prend jamais deux fois la même valeur, d'où

$$x(x + 3) = 10 \iff x^2 + 3x - 10 = 0.$$

Le discriminant vaut $9 + 40 = 49$, de racine carrée 7, donc $x = \frac{-3 - 7}{2} = -5$ ou $x = \frac{-3 + 7}{2} = 2$.

La valeur -5 est à écarter car elle sort de l'ensemble de définition. La solution est $x = 2$.

Vérification : $\ln(2) + \ln(5) = \ln(10)$.

- 4) $\ln(a) + \ln(b)$ est le logarithme du *produit* ab ; $\ln(a + b)$ est le logarithme de la *somme*, et ne se simplifie pas. En une phrase :

le logarithme change les produits en sommes,

jamais les sommes en produits.

Exercice 3 : Le niveau sonore d'un atelier

10 points

- 1) Pour $I = I_0$: $L = 10 \log\left(\frac{I_0}{I_0}\right) = 10 \log(1) = 10 \times 0 = \boxed{0 \text{ dB}}$.

Le zéro de l'échelle des décibels correspond donc au *seuil d'audition*, et non à l'absence de son. Un niveau négatif est possible : il désigne un son plus faible que ce seuil.

- 2) $L = 10 \log\left(\frac{10^{-6}}{10^{-12}}\right) = 10 \log(10^6) = 10 \times 6 = \boxed{60 \text{ dB}}$.

- 3) On cherche I tel que $10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right) = 85$, soit $\log\left(\frac{I}{I_0}\right) = 8,5$, donc $\frac{I}{I_0} = 10^{8,5}$ et

$$I = 10^{-12} \times 10^{8,5} = 10^{-3,5} \approx \boxed{3,2 \times 10^{-4} \text{ W/m}^2}.$$

- 4) a. Avec deux machines, l'intensité vaut $2I$. Le nouveau niveau est

$$L' = 10 \log\left(\frac{2I}{I_0}\right) = 10 \log\left(2 \times \frac{I}{I_0}\right) = 10 \left[\log(2) + \log\left(\frac{I}{I_0}\right) \right] = 10 \log(2) + L.$$

L'augmentation vaut donc bien $\boxed{L' - L = 10 \log(2)}$ décibels. C'est la propriété « produit $\rightarrow$ somme » qui fait tout le travail.

- b. $10 \log(2) \approx 10 \times 0,301 = \boxed{3,0 \text{ dB}}$.

- 5) Avec 10 machines, l'intensité vaut $10I$, et le même calcul donne

$$L' - L = 10 \log(10) = 10 \times 1 = \boxed{10 \text{ dB}}.$$

Une machine produisant 60 dB, dix machines en produisent 70 dB. $\boxed{70 < 85}$: le port du casque n'est donc pas imposé par ce seul critère.

- 6) **L'affirmation est fausse si l'on parle de décibels.** Doubler le nombre de machines double l'*intensité acoustique*, mais n'ajoute que $\boxed{3 \text{ dB}}$ au niveau sonore – très loin de le doubler.

La raison est dans le logarithme : l'échelle des décibels est construite pour écraser des intensités qui varient sur douze puissances de dix. Il faut *dix* machines pour gagner 10 dB, et *cent* pour en gagner 20. Le responsable confond la grandeur physique et l'échelle qui sert à la mesurer.