

Exercice 1 : Vrai ou faux

6 points

- 1) **Vraie.** C'est la propriété fondamentale du logarithme :

$$\boxed{\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)} \quad \text{pour } a > 0 \text{ et } b > 0.$$

C'est elle qui fait tout l'intérêt du logarithme : *il transforme les produits en sommes*. Contrôle : $\ln(2) + \ln(3) \approx 0,693 + 1,099 = 1,792$, et $\ln(6) \approx 1,792$.

- 2) **Fausse.** Il n'existe aucune formule simple pour $\ln(a + b)$: le logarithme transforme les *produits* en sommes, pas les sommes en produits.

Contre-exemple avec $a = b = 1$: $\ln(1 + 1) = \ln(2) \approx 0,693$, alors que $\ln(1) \times \ln(1) = 0 \times 0 = 0$.

Les deux diffèrent, donc $\boxed{\ln(a + b) \neq \ln(a) \times \ln(b)}$.

C'est l'erreur la plus fréquente du chapitre, et elle est reprise au sujet 2.

- 3) **Fausse.** Le logarithme népérien de a est défini comme l'unique solution de $e^x = a$. Or $e^x > 0$ pour tout x : cette équation n'a de solution que si $a > 0$. L'ensemble de définition est donc

$$\boxed{]0; +\infty[} \quad \text{et non } \mathbb{R}.$$

En particulier $\ln(0)$ et $\ln(-3)$ n'existent pas.

- 4) **Vraie.** La fonction $\ln$ est strictement croissante et $\ln(1) = 0$. Donc pour $0 < x < 1$, on a $\ln(x) < \ln(1) = 0$:

$$\boxed{\ln(x) < 0 \text{ sur }]0; 1[}.$$

Contrôle : $\ln(0,5) \approx -0,693$.

Exercice 2 : Transformer et résoudre

8 points

- 1) Le logarithme transforme les quotients en différences :

$$A = \ln(8) - \ln(2) = \ln\left(\frac{8}{2}\right) = \boxed{\ln(4)}.$$

- 2) On utilise d'abord $n \ln(a) = \ln(a^n)$, puis la somme :

$$B = 2 \ln(3) + \ln(5) = \ln(3^2) + \ln(5) = \ln(9) + \ln(5) = \ln(9 \times 5) = \boxed{\ln(45)}.$$

- 3) On applique le logarithme aux deux membres, ce qui est légitime car les deux sont strictement positifs :

$$e^{3x} = 5 \iff 3x = \ln(5) \iff \boxed{x = \frac{\ln(5)}{3}} \approx \boxed{0,5365}.$$

Vérification : $e^{3 \times 0,5365} \approx 5,00$.

- 4) La fonction $\ln$ est strictement croissante, donc l'inégalité est conservée en passant à l'exponentielle :

$$\ln(x) > 3 \iff x > e^3.$$

L'ensemble des solutions est $\boxed{]e^3; +\infty[}$, soit environ $]20,09; +\infty[$.

Attention : il faut aussi $x > 0$ pour que $\ln(x)$ existe, mais c'est automatiquement vérifié puisque $e^3 > 0$.

- 5) C'est un produit, avec $a(x) = x$ et $b(x) = \ln(x)$, donc $a'(x) = 1$ et $b'(x) = \frac{1}{x}$:

$$f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \boxed{\ln(x) + 1}.$$

Exercice 3 : Un tableur pour compter les chiffres

6 points

- 1) $\log(100) = \log(10^2) = \boxed{2}$ et $\log(1\,000) = \log(10^3) = \boxed{3}$.
Le logarithme décimal d'une puissance de 10 est tout simplement son exposant.
- 2) $\log(1\,000\,000) = \log(10^6) = \boxed{6}$, donc D4 = $\lfloor 6 \rfloor + 1 = \boxed{7}$.
Et en effet 1 000 000 s'écrit avec 7 chiffres : un 1 suivi de six zéros.
- 3) $\log(4\,096) \approx 3,612$, donc D5 = $\lfloor 3,612 \rfloor + 1 = 3 + 1 = \boxed{4}$.
Vérification : 4 096 s'écrit bien avec 4 chiffres.
- 4) En recopiant vers le bas, les références de ligne suivent :

$$=\text{ENT}(C5)+1.$$

- 5) Avec $n = 4\,096$, la cellule C5 vaut 3,612. Or

$$\text{ARRONDI}(3,612;0) = 4 \quad \text{donc} \quad \text{ARRONDI}(C5;0)+1 = 5.$$

La formule annoncerait 5 chiffres alors que 4 096 n'en a que 4.

La différence est de fond : il faut *tronquer* la partie décimale, pas l'arrondir. Dès que la partie décimale de $\log(n)$ dépasse 0,5 – c'est-à-dire dès que n dépasse environ 3,16 fois une puissance de 10 – l'arrondi ajoute un chiffre de trop.