

Calculatrice autorisée (mode examen)

### Exercice 1 : Vrai ou faux

6 points

Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse. **Toute réponse doit être justifiée** : un calcul, une propriété du cours, ou un contre-exemple.

- 1) Pour tous réels  $a > 0$  et  $b > 0$ ,  $\ln(a) + \ln(b) = \ln(ab)$ .
- 2) Pour tous réels  $a > 0$  et  $b > 0$ ,  $\ln(a + b) = \ln(a) \times \ln(b)$ .
- 3) La fonction logarithme népérien est définie sur  $\mathbb{R}$ .
- 4)  $\ln(x)$  est négatif pour tout  $x$  compris strictement entre 0 et 1.

### Exercice 2 : Transformer et résoudre

8 points

Les questions de cet exercice sont indépendantes les unes des autres.

- 1) Écrire  $A = \ln(8) - \ln(2)$  sous la forme  $\ln(k)$ , où  $k$  est un entier.
- 2) Écrire  $B = 2\ln(3) + \ln(5)$  sous la forme  $\ln(k)$ , où  $k$  est un entier.
- 3) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $e^{3x} = 5$ . On donnera la valeur exacte, puis une valeur approchée à  $10^{-4}$  près.
- 4) Résoudre dans  $]0; +\infty[$  l'inéquation  $\ln(x) > 3$ . On donnera la solution sous forme d'intervalle, avec une borne exacte.
- 5) Calculer la dérivée de  $f(x) = x \ln(x)$  sur  $]0; +\infty[$ .

### Exercice 3 : Un tableur pour compter les chiffres

6 points

Le logarithme décimal, noté  $\log$ , permet de connaître l'ordre de grandeur d'un nombre : le nombre de chiffres de l'écriture décimale d'un entier  $n \geq 1$  vaut

$$\lfloor \log(n) \rfloor + 1,$$

où  $\lfloor \cdot \rfloor$  désigne la partie entière.

Un technicien construit la feuille de calcul suivante pour vérifier cette règle.

|   | A          | B         | C         | D              |
|---|------------|-----------|-----------|----------------|
| 1 | Nombre     | $n$       | $\log(n)$ | Nb de chiffres |
| 2 | cent       | 100       | 2         | 3              |
| 3 | mille      | 1 000     | 3         | 4              |
| 4 | un million | 1 000 000 | ...       | ...            |
| 5 | quelconque | 4 096     | 3,612     | ...            |

La cellule C2 contient la formule =LOG10(B2) et la cellule D2 contient =ENT(C2)+1.

- 1) Vérifier par le calcul les valeurs des cellules C2 et C3.
- 2) Compléter les cellules C4 et D4.
- 3) Compléter la cellule D5, et vérifier le résultat en comptant les chiffres de 4 096.

- 4) Le technicien recopie la formule de D2 vers le bas. Écrire la formule qui se trouve alors en D5.
- 5) Un collègue propose de remplacer  $\text{=ENT}(C2)+1$  par  $\text{=ARRONDI}(C2;0)+1$ . Montrer, en prenant  $n = 4\,096$ , que cette formule ne convient pas.