

Exercice 1 : La vibration résiduelle d'un bâti de machine

10 points

Partie A – Ce que deux mesures ne disent pas

1) $v(0) = 12 \times 0 \times e^0 = 0 \text{ mm/s}$.

À l'instant précis de la frappe, le bâti n'a pas encore commencé à bouger : sa vitesse de vibration est nulle.

- 2) La vibration part de 0 à $t = 0$ et vaut 7,28 mm/s à $t = 1$ s. Elle a donc nécessairement *augmenté* sur cet intervalle. Or elle vaut 6,50 mm/s à $t = 4$ s : elle a donc *diminué* ensuite. Une fonction qui monte puis descend n'est pas décroissante :

la conclusion du technicien est fausse.

Ses deux mesures, prises isolément, laissent croire à une décroissance parce qu'elles sont toutes deux situées *après* le pic – mais la valeur en $t = 0$ suffit à le réfuter, sans aucune dérivée. On verra en partie B que le maximum vaut près de 8,83 mm/s, soit davantage que les deux mesures relevées.

Partie B – Étude complète

- 3) v est un produit, avec $a(t) = 12t$ et $b(t) = e^{-0,5t}$, donc $a'(t) = 12$ et $b'(t) = -0,5e^{-0,5t}$:

$$v'(t) = 12e^{-0,5t} - 6te^{-0,5t} = e^{-0,5t}(12 - 6t) = 12(1 - 0,5t)e^{-0,5t}.$$

- 4) $e^{-0,5t} > 0$, donc le signe de $v'(t)$ est celui de $1 - 0,5t$: positif pour $t < 2$, nul en $t = 2$, négatif pour $t > 2$.

t	0	2	$+\infty$
$v'(t)$	+	0	-
v	0	$\frac{24}{e}$	0

- 5) v croît puis décroît : le maximum est atteint en $t = 2$ secondes et vaut

$$v(2) = 24e^{-1} = \frac{24}{e} \approx 8,83 \text{ mm/s}.$$

C'est donc *deux secondes après la frappe* que le bâti vibre le plus fort – et non au moment du choc.

- 6) Forme indéterminée « $+\infty \times 0$ », levée par la *croissance comparée* : $\lim_{t \rightarrow +\infty} te^{-0,5t} = 0$, donc

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 0.$$

Physiquement, la vibration s'éteint et le bâti revient au repos.

- 7) Au tableau de valeurs, après le maximum : $v(6) \approx 3,58$ mm/s et $v(7) \approx 2,54$ mm/s. Le seuil est donc franchi *au bout de 7 secondes*.

Or $v(5) = 60e^{-2,5} \approx 4,93$ mm/s, nettement au-dessus de 3 :

une cadence de 5 secondes ne respecte pas la norme.

Il faudrait espacer les frappes d'au moins 7 secondes – ou améliorer l'amortisseur, ce qui fait l'objet de l'exercice suivant.

Exercice 2 : Choisir un amortisseur

5 points

Question ouverte : on attend une démarche complète et rédigée. Voici une solution possible.

On dérive $w(t) = 12t e^{-kt}$ comme un produit, en traitant k comme une constante :

$$w'(t) = 12 e^{-kt} + 12t \times (-k e^{-kt}) = 12 e^{-kt} (1 - kt).$$

Comme $12 > 0$ et $e^{-kt} > 0$, le signe de $w'(t)$ est celui de $1 - kt$: positif pour $t < \frac{1}{k}$, nul en $t = \frac{1}{k}$, négatif ensuite. La fonction croît puis décroît, donc elle admet un maximum en

$$t = \frac{1}{k}, \quad \text{de valeur} \quad w\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{12}{k} e^{-1} = \frac{12}{k e}.$$

Contrôle sur l'amortisseur actuel : avec $k = 0,5$ on retrouve bien $t = 2$ s et un maximum de $\frac{24}{e} \approx 8,83$ mm/s, conformément à l'exercice 1.

Réponse au service maintenance. Les deux grandeurs, $\frac{1}{k}$ et $\frac{12}{k e}$, sont l'une et l'autre *inversement* proportionnelles à k . Donc si k augmente :

le pic de vibration arrive plus tôt ET il est moins intense.

C'est un double gain, et il est proportionnel : doubler k divise par deux l'instant du pic et par deux son intensité. Avec $k = 1$, par exemple, le pic tomberait à $t = 1$ s pour $\frac{12}{e} \approx 4,41$ mm/s — moitié moins que l'amortisseur actuel, et sous le seuil de la norme dès le départ.

Remarque : le résultat ne dépend pas du coefficient 12, qui ne fait que régler l'échelle verticale. C'est bien k , et lui seul, qui commande la forme de la réponse.

Exercice 3 : Deux composées à dériver

5 points

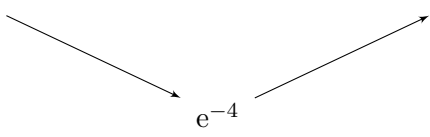
1) $u(x) = 3x - 1$ donc $u'(x) = 3$, et la dérivée de $X \mapsto X^4$ est $4X^3$:

$$f'(x) = 3 \times 4(3x - 1)^3 = 12(3x - 1)^3.$$

2) a. La fonction intérieure est $u(x) = x^2 - 4x$, l'extérieure $X \mapsto e^X$. Avec $u'(x) = 2x - 4$ et $(e^u)' = u' e^u$:

$$g'(x) = (2x - 4) e^{x^2 - 4x}.$$

b. L'exponentielle étant strictement positive, le signe de $g'(x)$ est celui de $2x - 4$: négatif pour $x < 2$, nul en $x = 2$, positif pour $x > 2$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$	−	0	+
g			

c. g décroît puis croît : son minimum est atteint en $x = 2$ et vaut

$$g(2) = e^{4-8} = \boxed{e^{-4}} \approx 0,018.$$

Ce minimum est *strictement positif*, comme toute valeur d'une exponentielle.