

Calculatrice autorisée (mode examen)

Exercice 1 : La vibration résiduelle d'un bâti de machine

10 points

Une presse industrielle est fixée sur un bâti amorti. À chaque frappe, le bâti se met à vibrer, puis la vibration s'atténue. On mesure la vitesse de vibration v , en millimètres par seconde, t secondes après la frappe. Elle est modélisée pour $t \geq 0$ par

$$v(t) = 12t e^{-0,5t}.$$

Partie A – Ce que deux mesures ne disent pas (3 points)

- 1) Calculer $v(0)$ et interpréter physiquement.
- 2) Un technicien relève $v(1) \approx 7,28$ mm/s et $v(4) \approx 6,50$ mm/s, et conclut que « la vibration décroît régulièrement ». Montrer, sans aucun calcul de dérivée, que cette conclusion est nécessairement fausse.

Partie B – Étude complète (7 points)

- 3) Montrer que, pour tout $t \geq 0$, $v'(t) = 12(1 - 0,5t)e^{-0,5t}$.
- 4) Déterminer le signe de $v'(t)$ sur $[0; +\infty[$, puis dresser le tableau de variations de v .
- 5) En déduire l'instant où la vibration est la plus forte et la vitesse maximale atteinte. On donnera la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-2} près.
- 6) Déterminer la limite de $v(t)$ en $+\infty$. On précisera le résultat de cours utilisé. Interpréter physiquement.
- 7) La norme d'atelier impose que la vibration redescende sous 3 mm/s avant la frappe suivante. À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien de secondes entières c'est le cas, puis dire si une cadence d'une frappe toutes les 5 secondes respecte la norme.

Exercice 2 : Choisir un amortisseur

5 points

Question ouverte. Aucune sous-question n'est posée : la démarche, les calculs et la rédaction font partie de l'évaluation.

Le fournisseur propose une gamme d'amortisseurs. Avec le modèle de coefficient k (où $k > 0$), la vitesse de vibration du bâti devient

$$w(t) = 12t e^{-kt}.$$

L'amortisseur monté actuellement correspond à $k = 0,5$.

Le service maintenance souhaite savoir ce qu'il gagnerait à monter un amortisseur de coefficient k plus grand. Répondre à cette question en déterminant l'instant du pic de vibration et son intensité en fonction de k , puis en expliquant ce que devient chacun des deux lorsque k augmente.

Exercice 3 : Deux composées à dériver

5 points

Cet exercice porte sur le chapitre « Composition de fonctions ».

- 1) Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3x - 1)^4$. Calculer $f'(x)$.

- 2) Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{x^2-4x}$.
- a. Identifier les deux fonctions dont g est la composée, puis calculer $g'(x)$.
 - b. Étudier le signe de $g'(x)$ et dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$. *On ne demande pas les valeurs aux bornes.*
 - c. En déduire le minimum de g sur $\mathbb{R}$. *On donnera la valeur exacte.*