

Exercice 1 : L'atténuation dans une fibre optique

8 points

- 1) $P(0) = 5 e^0 = \boxed{5 \text{ mW}}$: le modèle donne bien la puissance injectée.
 $P(10) = 5 e^{-0,5} \approx \boxed{3,03 \text{ mW}}$ – il reste environ 61 % de la puissance de départ après 10 km.
- 2) $P(x) = 5 e^{-0,05x}$ et $(e^{kx})' = k e^{kx}$ avec $k = -0,05$:

$$\boxed{P'(x) = -0,25 e^{-0,05x}}.$$

L'exponentielle étant strictement positive, $P'(x) < 0$ pour tout $x \geq 0$:

$$\boxed{P \text{ est strictement décroissante sur } [0; +\infty[}.$$

Interprétation : *plus le signal parcourt de distance dans la fibre, plus sa puissance est faible* – c'est l'atténuation.

- 3) Au tableau de valeurs :

$$P(18) \approx 2,03 \text{ mW} \quad \text{et} \quad P(19) \approx 1,93 \text{ mW}.$$

Le seuil de 2 mW est donc franchi entre 18 et 19 km. En pratique, le répéteur sera placé au plus tard au kilomètre 19.

- 4) Quand $x \rightarrow +\infty$, $-0,05x \rightarrow -\infty$ donc $e^{-0,05x} \rightarrow 0$:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = 0}.$$

Physiquement : sur une très grande distance le signal s'éteint, d'où la nécessité de répéteurs pour le régénérer périodiquement.

- 5) **Non.** $P(x) = 0$ exigerait $e^{-0,05x} = 0$, or l'exponentielle est strictement positive : elle ne s'annule jamais. La puissance reste donc toujours strictement positive, aussi petite soit-elle. Le modèle décrit une décroissance qui *tend* vers zéro sans l'atteindre. En pratique le signal devient inexploitable bien avant, noyé dans le bruit du récepteur : c'est un seuil de détection, non prévu par le modèle, qui fixe la portée réelle.

Exercice 2 : Vrai ou faux

4 points

- 1) **Vraie.** C'est une propriété fondamentale :

$$\boxed{\text{la fonction exponentielle est strictement positive sur } \mathbb{R}}.$$

Sa courbe reste entièrement au-dessus de l'axe des abscisses.

- 2) **Fausse.** Couper l'axe des abscisses signifierait qu'il existe un réel x tel que $e^{-x} = 0$. C'est impossible d'après l'affirmation précédente : l'exponentielle ne s'annule jamais. La courbe *se rapproche* indéfiniment de l'axe quand x croît, sans jamais le toucher – s'en approcher et le couper sont deux choses différentes.
- 3) **Fausse.** Le raisonnement s'arrête à mi-chemin : c'est une forme indéterminée « $+\infty \times 0$ », car $x^2 \rightarrow +\infty$ mais $e^{-x} \rightarrow 0$. On ne peut pas conclure en ne regardant qu'un seul des deux facteurs. Le résultat de *croissance comparée* tranche :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = 0} \quad \text{pour tout entier } n \geq 1.$$

La limite vaut donc 0, et non $+\infty$. *Contrôle numérique* : $g(2) \approx 0,541$, $g(5) \approx 0,168$, $g(10) \approx 0,005$ – les valeurs diminuent bel et bien.

- 4) **Vraie.** L'exponentielle prend une même valeur pour un seul exposant, donc on peut identifier les

exposants :

$$e^{2x} = e^{x+3} \iff 2x = x + 3 \iff \boxed{x = 3}.$$

Vérification : $e^6 = e^6$.

Exercice 3 : À la recherche du nombre e

8 points

- 1) Le tableau montre $\tau(2,7) = 0,993 < 1$ et $\tau(2,72) = 1,001 > 1$. La fonction τ étant croissante, la valeur cherchée est franchie entre ces deux nombres :

$$\boxed{2,7 < e < 2,72}.$$

(La valeur exacte est $e \approx 2,71828$.)

- 2) a part de 2 et augmente de 0,1 tant que le taux reste inférieur à 1. Elle prend successivement

2 ; 2,1 ; 2,2 ; 2,3 ; 2,4 ; 2,5 ; 2,6 ; 2,7,

valeurs pour lesquelles le taux reste sous 1 (le dernier vaut 0,993). Au tour suivant $a = 2,8$ et $\tau(2,8) \approx 1,030 > 1$: la boucle s'arrête. Le script renvoie $\boxed{2,8}$.

- 3) Le paramètre pas fixe $\boxed{\text{la finesse du balayage}}$.

En le divisant par 10 (soit 0,01), la valeur renvoyée serait 2,72 au lieu de 2,8 – *dix fois plus précise* – mais il faudrait $\boxed{\text{dix fois plus de tours de boucle}}$. Précision et temps de calcul s'échangent l'un contre l'autre.

- 4) Si a valait 3 au départ, on aurait $\tau(3) \approx 1,099 \geq 1$: la condition serait $\boxed{\text{fausse dès le premier test}}$, la boucle ne s'exécuterait pas et le script renverrait 3 – une valeur qui n'approche pas e . Il faut alors balayer vers le bas, tant que le taux reste supérieur à 1 :

```
def chercher_descendant(pas) :
    h = 1e-6
    a = 3.0
    while (a ** h - 1) / h > 1 :
        a = a - pas
    return a
```

- 5) La boucle s'arrête au *premier* a dont le taux dépasse 1, c'est-à-dire juste *après* avoir franchi la valeur cherchée : la valeur renvoyée est donc $\boxed{\text{supérieure à } e}$. Ici $2,8 > 2,718\dots$. Comme la valeur précédente, 2,7, était encore sous le seuil, le nombre e est compris entre 2,7 et 2,8 : l'erreur commise est $\boxed{\text{au plus égale au pas}}$, soit 0,1.