

Calculatrice autorisée (mode examen)

Exercice 1 : L'atténuation dans une fibre optique

8 points

Un signal lumineux est injecté dans une fibre optique avec une puissance de 5 milliwatts. En raison de l'atténuation, la puissance décroît le long de la fibre. La puissance P , exprimée en milliwatts, à la distance x de l'entrée, exprimée en kilomètres, est modélisée pour $x \geq 0$ par

$$P(x) = 5e^{-0,05x}.$$

- 1) Vérifier que la puissance à l'entrée de la fibre est bien de 5 mW, puis calculer la puissance après 10 kilomètres, *arrondie à 10^{-2} près*.
- 2) Calculer $P'(x)$ et déterminer son signe sur $[0; +\infty[$. En déduire le sens de variation de P , puis l'interpréter en une phrase.
- 3) Un répéteur doit être installé dès que la puissance descend sous 2 mW. À l'aide du tableau de valeurs de la calculatrice, déterminer *les deux kilomètres entiers consécutifs* entre lesquels ce seuil est franchi. *On donnera les deux valeurs de P correspondantes, arrondies à 10^{-2} près*.
- 4) Déterminer la limite de $P(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, et l'interpréter physiquement.
- 5) Selon ce modèle, la puissance peut-elle devenir nulle en un point de la fibre? Justifier, et expliquer en une phrase ce que cela dit de la portée du modèle.

Exercice 2 : Vrai ou faux

4 points

Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse. **Toute réponse doit être justifiée** : un calcul, une propriété du cours, ou un contre-exemple.

- 1) Pour tout réel x , $e^x > 0$.
- 2) La courbe de la fonction $x \mapsto e^{-x}$ finit par couper l'axe des abscisses.
- 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = +\infty$, car x^2 tend vers $+\infty$.
- 4) Si $e^{2x} = e^{x+3}$, alors $x = 3$.

Exercice 3 : À la recherche du nombre e

8 points

Pour un réel $a > 0$, on s'intéresse à la fonction $x \mapsto a^x$ et à la pente de sa tangente au point d'abscisse 0. Cette pente est approchée par le taux de variation

$$\tau(a) = \frac{a^h - 1}{h}, \quad \text{avec } h \text{ petit, fixé à } h = 10^{-6}.$$

Le nombre e est, par définition, l'unique valeur de a pour laquelle cette pente vaut 1.

Le script Python ci-dessous balaie des valeurs de a et s'arrête à la première dont le taux dépasse 1.

```
def chercher(pas) :
    h = 1e-6
    a = 2.0
    while (a ** h - 1) / h < 1 :
        a = a + pas
    return a
```

- 1) Le tableau ci-dessous donne quelques valeurs de $\tau(a)$.

a	2	2,5	2,7	2,72	3
$\tau(a)$	0,693	0,916	0,993	1,001	1,099

Entre quelles valeurs du tableau se situe le nombre e ? Justifier.

- 2) Que renvoie l'appel `chercher(0.1)`? Détailler les valeurs successives de a .
- 3) Quel est le rôle du paramètre `pas`? Que se passe-t-il, en précision et en nombre de tours de boucle, si on le divise par 10?
- 4) La variable a est initialisée à 2. Que se passerait-il si on l'initialisait à 3? Modifier le script pour qu'il fonctionne aussi dans ce cas.
- 5) Le script s'arrête au *premier* a dont le taux dépasse 1. La valeur renvoyée est-elle supérieure ou inférieure à e ? Justifier, et majorer l'erreur commise.