

Exercice 1 : Quelle charge pour tirer le plus de puissance ?

14 points

Partie A – Premiers calculs

$$1) P(1) = \frac{144 \times 1}{4^2} = \frac{144}{16} = \boxed{9 \text{ W}}; P(3) = \frac{144 \times 3}{6^2} = \frac{432}{36} = \boxed{12 \text{ W}}; P(9) = \frac{144 \times 9}{12^2} = \frac{1296}{144} = \boxed{9 \text{ W}}.$$

2) $P(1) = P(9) = 9 \text{ W}$: deux charges différentes donnent la même puissance. La puissance n'est donc pas une fonction monotone de x – elle monte puis redescend.

3) Si la puissance augmentait avec x , on aurait $P(9) > P(3)$. Or $P(9) = 9 < 12 = P(3)$: l'affirmation est fausse. Augmenter la résistance de la charge au-delà d'un certain point fait *baisser* la puissance reçue.

Partie B – Étude de la fonction

4) a. C'est une composée : $u(x) = x + 3$ donc $u'(x) = 1$, et la dérivée de $X \mapsto X^{-2}$ est $-2X^{-3}$.
Donc

$$((x+3)^{-2})' = 1 \times (-2(x+3)^{-3}) = \boxed{-\frac{2}{(x+3)^3}}.$$

b. On dérive le produit $P(x) = \underbrace{144x}_{a(x)} \times \underbrace{(x+3)^{-2}}_{b(x)}$, avec $a'(x) = 144$ et $b'(x) = -2(x+3)^{-3}$:

$$P'(x) = 144(x+3)^{-2} + 144x \times (-2(x+3)^{-3}) = \frac{144}{(x+3)^2} - \frac{288x}{(x+3)^3}.$$

On réduit au même dénominateur $(x+3)^3$:

$$P'(x) = \frac{144(x+3) - 288x}{(x+3)^3} = \frac{144x + 432 - 288x}{(x+3)^3} = \frac{432 - 144x}{(x+3)^3} = \boxed{\frac{144(3-x)}{(x+3)^3}}.$$

5) Pour $x > 0$, on a $x+3 > 0$ donc $(x+3)^3 > 0$, et $144 > 0$: le signe de $P'(x)$ est celui de $3-x$. Il est positif pour $x < 3$, nul en $x = 3$, négatif pour $x > 3$.

x	0	3	$+\infty$
$P'(x)$	+	0	-
P		12	

6) P est croissante puis décroissante : elle atteint son *maximum* en $x = 3$.

$$\boxed{x = 3 \, \Omega \text{ et } P_{\max} = P(3) = 12 \text{ W}}.$$

On remarque que $x = 3$ est exactement la valeur de la résistance interne r . Ce n'est pas un hasard : c'est l'objet de la partie C.

Partie C – Généralisation

7) **Question ouverte.** On dérive $P(x) = U^2 x (x+r)^{-2}$ comme un produit, en traitant U et r comme des constantes :

$$P'(x) = U^2(x+r)^{-2} + U^2 x \times (-2(x+r)^{-3}) = \frac{U^2(x+r) - 2U^2 x}{(x+r)^3} = \frac{U^2(r-x)}{(x+r)^3}.$$

Pour $x > 0$ et $r > 0$, le dénominateur $(x+r)^3$ et le facteur U^2 sont strictement positifs : le signe

de $P'(x)$ est celui de $r - x$. La dérivée est donc positive pour $x < r$, nulle en $x = r$, négative pour $x > r$: P croît puis décroît et admet un maximum en $x = r$.
La puissance maximale vaut

$$P(r) = \frac{U^2 r}{(r + r)^2} = \frac{U^2 r}{4r^2} = \frac{U^2}{4r}.$$

Conclusion : la charge reçoit le maximum de puissance lorsque

sa résistance égale la résistance interne de la source

C'est le théorème d'adaptation d'impédance.

Vérification sur la partie B : $r = 3$ donne bien $x = 3$, et $\frac{U^2}{4r} = \frac{144}{12} = 12$ W.

8) On applique directement le résultat : charge optimale $x = r = 8 \Omega$, et puissance maximale

$$P_{\max} = \frac{24^2}{4 \times 8} = \frac{576}{32} = 18 \text{ W}.$$

9) Le rendement est

$$\eta(x) = \frac{P(x)}{\frac{U^2}{x+r}} = \frac{U^2 x}{(x+r)^2} \times \frac{x+r}{U^2} = \frac{x}{x+r}.$$

À l'optimum $x = r$, il vaut $\frac{r}{2r} = \frac{1}{2}$, soit 50 %.

Non, ce n'est pas le réglage retenu pour transporter de l'énergie : la moitié de la puissance fournie est dissipée dans la source elle-même. On cherche ici le *maximum de puissance transmise*, ce qui est utile en électronique de faible puissance (capteurs, antennes, panneaux photovoltaïques), mais pour un transport d'énergie on privilégie au contraire une charge de résistance très grande devant r , où le rendement s'approche de 100 % même si la puissance transmise est plus faible.

Exercice 2 : Le coût moyen d'un atelier de découpe

6 points

1) Par définition, $C_m(n) = \frac{C(n)}{n} = \frac{6n + 1\,200}{n} = \frac{6n}{n} + \frac{1\,200}{n} = 6 + \frac{1\,200}{n}$.

2) $C_m(100) = 6 + \frac{1\,200}{100} = 6 + 12 = 18$ euros ; $C_m(400) = 6 + \frac{1\,200}{400} = 6 + 3 = 9$ euros.

3) $C_m(n) = 6 + 1\,200 \times \frac{1}{n}$, donc $C'_m(n) = -\frac{1\,200}{n^2}$.

Pour $n > 0$, $n^2 > 0$ donc $C'_m(n) < 0$: C_m est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$. Plus on produit, plus les charges fixes se répartissent, et plus le coût unitaire baisse.

4) On résout $C_m(n) \leq 10$:

$$6 + \frac{1\,200}{n} \leq 10 \iff \frac{1\,200}{n} \leq 4 \iff n \geq 300$$

(le sens de l'inégalité est conservé car $n > 0$). Il faut donc découper au minimum 300 pièces dans le mois.

5) **Non**. $C_m(n) = 6$ exigerait $\frac{1\,200}{n} = 0$, ce qui est impossible : un quotient de numérateur non nul ne s'annule jamais. Le coût moyen reste toujours strictement supérieur à 6 euros.

Interprétation : 6 euros est le coût *variable* d'une pièce. Les 1 200 euros de charges fixes se répartissent sur toujours plus de pièces, mais ne disparaissent jamais : le coût moyen s'approche

de 6 euros sans jamais l'atteindre.