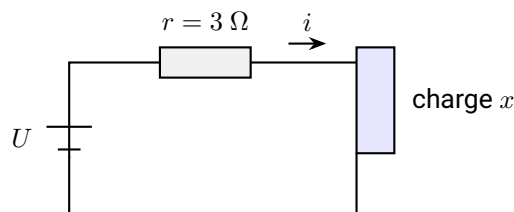


Calculatrice autorisée (mode examen)

Exercice 1 : Quelle charge pour tirer le plus de puissance ?

14 points

Une source de tension continue alimente une charge électrique réglable. La source délivre une tension à vide $U = 12$ volts et possède une résistance interne $r = 3$ ohms. La charge a une résistance x , exprimée en ohms, que l'on peut régler librement pour $x > 0$.



On admet que la puissance P reçue par la charge, exprimée en watts, est donnée pour $x > 0$ par

$$P(x) = \frac{U^2 x}{(x + r)^2} = \frac{144 x}{(x + 3)^2}.$$

Partie A – Premiers calculs (4 points)

- 1) Calculer $P(1)$, $P(3)$ et $P(9)$. On donnera les valeurs exactes.
- 2) Que remarque-t-on en comparant $P(1)$ et $P(9)$?
- 3) Un technicien en déduit : « la puissance augmente avec la résistance de la charge ». Réfuter cette affirmation à l'aide des valeurs calculées.

Partie B – Étude de la fonction (6 points)

- 4) On écrit $P(x) = 144 x \times (x + 3)^{-2}$, produit de $x \mapsto 144x$ et de la composée $x \mapsto (x + 3)^{-2}$.
 - a. Calculer la dérivée de $x \mapsto (x + 3)^{-2}$.
 - b. En utilisant la dérivée d'un produit, montrer que, pour tout $x > 0$,

$$P'(x) = \frac{144(3 - x)}{(x + 3)^3}.$$

- 5) Déterminer le signe de $P'(x)$ sur $]0; +\infty[$, puis dresser le tableau de variations de P . On ne demande pas les valeurs aux bornes.
- 6) En déduire la valeur de x qui rend la puissance maximale, et cette puissance maximale.

Partie C – Généralisation (4 points)

- 7) Question ouverte. On reprend le cas général : U et r sont deux réels strictement positifs fixés, et

$$P(x) = \frac{U^2 x}{(x + r)^2} \text{ pour } x > 0.$$

Démontrer que la puissance est maximale lorsque la résistance de la charge est égale à la résistance interne de la source, et donner alors l'expression de la puissance maximale en fonction de U et de r . Aucune indication n'est donnée : la démarche fait partie de l'évaluation.

- 8) Une seconde source a pour tension à vide $U = 24$ volts et pour résistance interne $r = 8$ ohms. Sans refaire l'étude, donner la résistance de charge optimale et la puissance maximale correspondante.
- 9) Le rendement est le rapport entre la puissance reçue par la charge et la puissance totale fournie par la source, cette dernière valant $\frac{U^2}{x+r}$. Calculer le rendement à l'optimum. Ce réglage est-il celui qu'on choisirait pour transporter de l'énergie ? Justifier en une phrase.

Exercice 2 : Le coût moyen d'un atelier de découpe

6 points

Cet exercice porte sur le chapitre « Fonction inverse ».

Un atelier de découpe laser facture chaque mois 1 200 euros de charges fixes, auxquelles s'ajoutent 6 euros par pièce découpée. Pour n pièces découpées dans le mois ($n > 0$), le coût total en euros est donc $C(n) = 6n + 1\,200$.

On appelle coût moyen d'une pièce le quotient $C_m(n) = \frac{C(n)}{n}$.

- 1) Montrer que $C_m(n) = 6 + \frac{1\,200}{n}$.
- 2) Calculer le coût moyen pour 100 pièces, puis pour 400 pièces.
- 3) Calculer $C'_m(n)$ et en déduire le sens de variation de C_m sur $]0; +\infty[$.
- 4) L'atelier veut que le coût moyen d'une pièce ne dépasse pas 10 euros. Déterminer le nombre minimal de pièces à découper dans le mois.
- 5) Le coût moyen peut-il descendre jusqu'à 6 euros ? Interpréter ce résultat en une phrase en termes de charges fixes.