

Exercice 1 : Quatre questions indépendantes

8 points

1) Réponse B.

On pose $u(x) = 2x - 5$, donc $u'(x) = 2$, et la fonction extérieure est $X \mapsto X^4$, de dérivée $4X^3$. La formule $(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)$ donne

$$f'(x) = 2 \times 4(2x - 5)^3 = \boxed{8(2x - 5)^3}.$$

Les autres propositions correspondent aux erreurs classiques : **A** oublie le facteur $u' = 2$; **C** ne garde que u' en oubliant l'exposant 4; **D** ne baisse pas l'exposant.

2) a. $u(x) = 2x - \frac{\pi}{3}$ donc $u'(x) = 2$, et $(\sin)' = \cos$:

$$g'(x) = 2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right).$$

$$\text{b. } g'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 2 \cos(0) = \boxed{2}.$$

3) $p(x) = (u(x))^3$ est une composée : la fonction intérieure est u , la fonction extérieure $X \mapsto X^3$ de dérivée $3X^2$. Donc

$$p'(x) = u'(x) \times 3(u(x))^2.$$

En $x = 2$, le tableau donne $u(2) = 1$ et $u'(2) = 2$, d'où

$$p'(2) = 2 \times 3 \times 1^2 = \boxed{6}.$$

On n'a besoin *ni* de l'expression de u , *ni* des autres colonnes du tableau : la formule de dérivation d'une composée ne fait intervenir que $u(2)$ et $u'(2)$.

4) On résout $\frac{1}{(2x+1)^2} = 0,09$:

$$(2x+1)^2 = \frac{1}{0,09} = \frac{100}{9} \iff 2x+1 = \frac{10}{3} \text{ ou } 2x+1 = -\frac{10}{3}.$$

Sur $]-\frac{1}{2}; +\infty[$ on a $2x+1 > 0$, donc seule la première convient :

$$2x = \frac{10}{3} - 1 = \frac{7}{3}, \quad x = \frac{7}{6} \approx \boxed{1,17}.$$

Exercice 2 : Le refroidissement d'une pièce en sortie de four

8 points

1) $T(0) = 20 + \frac{480}{(1+0)^2} = 20 + 480 = \boxed{500^\circ\text{C}}$: le modèle donne bien la température de sortie du four.

2) $T(3) = 20 + \frac{480}{(1+1,5)^2} = 20 + \frac{480}{2,5^2} = 20 + \frac{480}{6,25} = 20 + 76,8 = 96,8$, soit $\boxed{97^\circ\text{C}}$ au degré près.

3) Avec $T(t) = 20 + 480(1+0,5t)^{-2}$: la fonction intérieure est $u(t) = 1+0,5t$, donc $u'(t) = 0,5$; la fonction extérieure est $X \mapsto 480X^{-2}$, de dérivée $-960X^{-3}$. La constante 20 a une dérivée nulle.

$$T'(t) = 0,5 \times (-960(1+0,5t)^{-3}) = \boxed{-\frac{480}{(1+0,5t)^3}}.$$

Le facteur $u' = 0,5$ est indispensable : sans lui on trouverait $-\frac{960}{(1+0,5t)^3}$, soit le double.

4) Pour $t \geq 0$, $1+0,5t \geq 1 > 0$, donc $(1+0,5t)^3 > 0$ et $T'(t) < 0$: T est $\boxed{\text{strictement décroissante}}$ sur $[0; +\infty[$.

C'est bien **cohérent** : une pièce sortie du four et laissée dans un local plus froid refroidit, sa température ne peut que baisser.

$$5) T'(6) = -\frac{480}{(1+3)^3} = -\frac{480}{64} = \boxed{-7,5 \text{ } ^\circ\text{C/min}}.$$

Interprétation : au bout de 6 minutes, la pièce perd environ 7,5 degrés par minute. La dérivée d'une température par rapport au temps est bien une *vitesse de refroidissement*, exprimée en degrés par minute.

6) On résout $T(t) = 50$:

$$\frac{480}{(1+0,5t)^2} = 30 \iff (1+0,5t)^2 = 16 \iff 1+0,5t = 4$$

(la valeur -4 est écartée car $1+0,5t > 0$), d'où $0,5t = 3$ et $\boxed{t = 6 \text{ minutes}}$.

La pièce peut donc être manipulée au bout de 6 minutes exactement.

$$7) \text{ Non. } T(t) = 20 \text{ équivaudrait à } \frac{480}{(1+0,5t)^2} = 0, \text{ or un quotient de numérateur } 480 \neq 0$$

ne s'annule jamais. La température reste donc toujours strictement supérieure à $20 \text{ } ^\circ\text{C}$.

Le modèle décrit une décroissance qui *s'approche* de la température du local sans jamais l'atteindre. C'est physiquement raisonnable à court terme, mais cela signifie que le modèle ne permet pas de dire « la pièce est à température ambiante » : il faut fixer une tolérance, par exemple $21 \text{ } ^\circ\text{C}$, pour que la question ait une réponse.

Exercice 3 : La copie d'un élève

4 points

$$1) f(0) = (0 - 0 + 7)^3 = 7^3 = \boxed{343} \text{ et } f(2) = (4 - 8 + 7)^3 = 3^3 = \boxed{27}.$$

On a $0 < 2$ mais $f(0) > f(2)$: la fonction **n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$** . La conclusion de la copie est donc fausse, et ces deux calculs suffisent à le prouver.

2) L'élève a dérivé la fonction extérieure en **oubliant le facteur $u'(x)$** . Avec $u(x) = x^2 - 4x + 7$, on a $u'(x) = 2x - 4$, donc

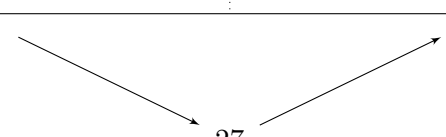
$$f'(x) = (2x - 4) \times 3(x^2 - 4x + 7)^2 = \boxed{6(x - 2)(x^2 - 4x + 7)^2}.$$

$$3) \text{ Forme canonique : } x^2 - 4x + 7 = (x - 2)^2 - 4 + 7 = (x - 2)^2 + 3.$$

Un carré est positif ou nul, donc $(x - 2)^2 + 3 \geq 3 > 0$: le trinôme est

strictement positif pour tout réel x .

4) D'après la question 3, $(x^2 - 4x + 7)^2 > 0$ pour tout x . Le signe de $f'(x)$ est donc celui de $6(x - 2)$, c'est-à-dire celui de $x - 2$: négatif avant 2, nul en 2, positif après.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f			

f est décroissante sur $]-\infty; 2]$ puis croissante sur $[2; +\infty[$, avec un minimum $f(2) = \boxed{27}$.

L'erreur de la copie venait bien du u' manquant : c'est lui qui apporte le facteur $x - 2$, donc le changement de signe. Sans lui, la dérivée paraissait toujours positive.