

Calculatrice autorisée (mode examen)

Exercice 1 : Quatre questions indépendantes

8 points

Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes les unes des autres.

- 1) **QCM.** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x - 5)^4$. Parmi les quatre propositions suivantes, une seule donne $f'(x)$. Indiquer la lettre de la réponse exacte en expliquant votre choix.

- A. $4(2x - 5)^3$ B. $8(2x - 5)^3$
C. $2(2x - 5)^3$ D. $8(2x - 5)^4$

- 2) Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

- a. Calculer $g'(x)$.
b. Calculer $g'\left(\frac{\pi}{6}\right)$. On donnera la valeur exacte.

- 3) Soit u une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, dont on donne ci-dessous quelques valeurs.

x	0	1	2	3
$u(x)$	4	2	1	3
$u'(x)$	-3	-1	2	5

On pose $p(x) = (u(x))^3$. Calculer $p'(2)$.

- 4) Une fonction q est définie sur $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ par $q(x) = \frac{1}{(2x+1)^2}$. Déterminer, en arrondissant à 10^{-2} près, la valeur de x pour laquelle $q(x) = 0,09$.

Exercice 2 : Le refroidissement d'une pièce en sortie de four

8 points

Dans un atelier de traitement thermique, une pièce métallique sort du four à 500°C et refroidit à l'air libre, dans un local maintenu à 20°C .

La température de la pièce, en degrés Celsius, t minutes après sa sortie du four, est modélisée pour $t \geq 0$ par

$$T(t) = 20 + \frac{480}{(1 + 0,5t)^2}.$$

- 1) Vérifier que le modèle donne bien 500°C à la sortie du four.
2) Calculer la température de la pièce au bout de 3 minutes, arrondie au degré.
3) Écrire $T(t) = 20 + 480(1 + 0,5t)^{-2}$, puis montrer, en dérivant une fonction composée, que

$$T'(t) = -\frac{480}{(1 + 0,5t)^3}.$$

- 4) Déterminer le signe de $T'(t)$ pour $t \geq 0$ et en déduire le sens de variation de T . Le modèle est-il cohérent avec la situation physique?
5) Calculer $T'(6)$ et interpréter ce nombre en précisant son unité.
6) La pièce peut être manipulée dès que sa température descend à 50°C . Déterminer au bout de combien de minutes c'est le cas. On donnera la valeur exacte.
7) Selon ce modèle, la pièce peut-elle atteindre la température du local, soit 20°C ? Justifier, et expliquer en une phrase ce que cela dit de la portée du modèle.

Exercice 3 : La copie d'un élève**4 points**

Un élève doit dériver la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - 4x + 7)^3$, puis étudier ses variations. Voici sa copie.

« La dérivée de X^3 est $3X^2$, donc $f'(x) = 3(x^2 - 4x + 7)^2$.
Un carré est toujours positif, donc $f'(x) \geq 0$ pour tout x .
Donc f est croissante sur $\mathbb{R}$. »

- 1) Calculer $f(0)$ et $f(2)$. Que peut-on en conclure sur la conclusion de la copie?
- 2) Quelle est l'erreur commise dans le calcul de $f'(x)$? Donner l'expression correcte.
- 3) Montrer que $x^2 - 4x + 7 > 0$ pour tout réel x . On pourra écrire ce trinôme sous forme canonique.
- 4) En déduire le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.