

Exercice 1 : Reconnaître et dériver une composée

8 points

Partie A

1) **Fausse.** Composer, c'est appliquer u d'abord, puis v au résultat :

$$(v \circ u)(x) = v(u(x)) = v(x+3) = (x+3)^2 = x^2 + 6x + 9.$$

L'expression $x^2 + 3$ proposée est $u(v(x))$, c'est-à-dire l'autre composée. C'est l'erreur de lecture la plus fréquente : dans $v \circ u$, u agit en premier.

2) **Vraie.** $(v \circ u)(x) = v(u(x)) = v(3x) = \sin(3x)$. On applique bien u d'abord, puis le sinus.

3) **Fausse.** Il manque le facteur u' . Avec $u(x) = 5x - 2$ et $v(X) = X^3$:

$$((5x - 2)^3)' = u'(x) \times 3(u(x))^2 = 5 \times 3(5x - 2)^2 = 15(5x - 2)^2.$$

Oublier le u' est l'erreur du chapitre. Contrôle rapide : en développant, $(5x - 2)^3$ a pour terme dominant $125x^3$, dont la dérivée est $375x^2$; et $15(5x - 2)^2$ a bien pour terme dominant $15 \times 25x^2 = 375x^2$. La réponse $3(5x - 2)^2$ donnerait $75x^2$, cinq fois trop petit.

4) **Vraie.** On pose $u(x) = 4x$ et $v(X) = \cos(X)$; alors $v(u(x)) = \cos(4x)$. La fonction est bien la composée de $x \mapsto 4x$ suivie du cosinus.

Partie B

Dans toute cette partie on applique la formule $(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)$.

5) $u(x) = 3x + 1$ donc $u'(x) = 3$; la fonction extérieure est $X \mapsto X^5$, de dérivée $5X^4$. Donc

$$f'(x) = 3 \times 5(3x + 1)^4 = 15(3x + 1)^4.$$

6) $u(x) = x^2 + 1$ donc $u'(x) = 2x$; la fonction extérieure est $X \mapsto X^3$, de dérivée $3X^2$. Donc

$$g'(x) = 2x \times 3(x^2 + 1)^2 = 6x(x^2 + 1)^2.$$

7) En écrivant $h(x) = (2x - 3)^{-1}$: $u(x) = 2x - 3$, $u'(x) = 2$, et la dérivée de $X \mapsto X^{-1}$ est $-X^{-2}$. Donc

$$h'(x) = 2 \times (-(2x - 3)^{-2}) = -\frac{2}{(2x - 3)^2}.$$

On retrouve la formule de la dérivée d'un inverse, vue au chapitre précédent : la composition permet de la redémontrer au lieu de l'apprendre par cœur.

8) Pour $k(x) = \sin(2x)$: $u(x) = 2x$, $u'(x) = 2$, et $(\sin)' = \cos$, donc $k'(x) = 2 \cos(2x)$.

Pour $\ell(x) = \cos(3x + \frac{\pi}{4})$: $u(x) = 3x + \frac{\pi}{4}$, $u'(x) = 3$, et $(\cos)' = -\sin$, donc

$$\ell'(x) = -3 \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Le $\frac{\pi}{4}$ est une constante : il ne change pas u' .

Exercice 2 : L'éclairage d'un poste de travail

6 points

1) $I(0) = \frac{900}{(0+1)^2} = 900 \text{ lux}$ et $I(5) = \frac{900}{6^2} = \frac{900}{36} = 25 \text{ lux}$.

Multiplier la distance par 6 (de 0 à 5, la quantité $d+1$ passe de 1 à 6) divise l'éclairement par 36 : c'est la décroissance en carré inverse, bien connue en physique.

2) $I(d) = 900 \times (d+1)^{-2}$. La fonction intérieure est $u(d) = d+1$, la fonction extérieure

$$X \mapsto 900 X^{-2}.$$

- 3) $u'(d) = 1$, et la dérivée de $X \mapsto 900X^{-2}$ est $-1800 X^{-3}$. Donc

$$I'(d) = 1 \times (-1800 (d+1)^{-3}) = -\frac{1800}{(d+1)^3}.$$

- 4) Pour $d \geq 0$ on a $d+1 \geq 1 > 0$, donc $(d+1)^3 > 0$ et $I'(d) < 0$: la dérivée est **strictement négative** et I est **strictement décroissante** sur $[0; +\infty[$.

Interprétation : *plus on éloigne le projecteur du plan de travail, moins celui-ci est éclairé.*

- 5) On cherche d tel que $I(d) = 100$:

$$\frac{900}{(d+1)^2} = 100 \iff (d+1)^2 = 9 \iff d+1 = 3 \text{ ou } d+1 = -3.$$

Comme $d \geq 0$, seule $d+1 = 3$ convient, d'où **$d = 2$ mètres**.

I étant décroissante, l'éclairement reste supérieur à 100 lux pour toute distance inférieure à 2 mètres : **2 m est donc la distance maximale**.

Exercice 3 : L'ordre compte

6 points

- 1) $(v \circ u)(3) = v(u(3)) = v(5) = 25$; $(u \circ v)(3) = u(v(3)) = u(9) = 2 \times 9 - 1 = 17$.

Ces deux nombres **ne sont pas égaux** : composer dans un sens ou dans l'autre ne donne pas le même résultat.

- 2) $(v \circ u)(x) = v(2x-1) = (2x-1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$;

$$(u \circ v)(x) = u(x^2) = 2x^2 - 1.$$

- 3) On résout :

$$4x^2 - 4x + 1 = 2x^2 - 1 \iff 2x^2 - 4x + 2 = 0 \iff x^2 - 2x + 1 = 0 \iff (x-1)^2 = 0.$$

L'unique solution est **$x = 1$** .

Vérification : $(v \circ u)(1) = 1^2 = 1$ et $(u \circ v)(1) = 2 - 1 = 1$. Les deux composées coïncident bien, mais *en ce seul point*.

- 4) La fonction `comparer` parcourt les entiers de -3 à 3 et retient ceux pour lesquels les deux composées sont égales. D'après la question 3, la seule valeur possible est $x = 1$, et elle est bien dans l'intervalle parcouru. L'appel renvoie donc **$[1]$** .

- 5) Le script ne teste que des entiers. Si, pour un autre couple de fonctions, l'équation $(v \circ u)(x) = (u \circ v)(x)$ n'avait pour solutions que des nombres **non entiers** – par exemple $x = 0,5$ ou $x = \sqrt{2}$ – aucune ne serait visitée et le script renverrait une liste vide.

Une liste vide signifierait alors seulement « aucune solution entière dans l'intervalle testé », et non « aucune solution ». C'est une limite du balayage, pas une propriété des fonctions : seule la résolution algébrique tranche.