

Calculatrice autorisée (mode examen)

Exercice 1 : Reconnaître et dériver une composée

8 points

Partie A – Vrai ou faux (4 points)

Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse. **Toute réponse doit être justifiée** : un calcul, une propriété du cours, ou un contre-exemple.

- 1) Si $u(x) = x + 3$ et $v(x) = x^2$, alors $(v \circ u)(x) = x^2 + 3$.
- 2) Si $u(x) = 3x$ et $v(x) = \sin(x)$, alors $(v \circ u)(x) = \sin(3x)$.
- 3) La dérivée de $x \mapsto (5x - 2)^3$ est $x \mapsto 3(5x - 2)^2$.
- 4) La fonction $x \mapsto \cos(4x)$ est la composée de $x \mapsto 4x$ suivie de la fonction cosinus.

Partie B – Calculs (4 points)

- 5) Calculer la dérivée de $f(x) = (3x + 1)^5$.
- 6) Calculer la dérivée de $g(x) = (x^2 + 1)^3$.
- 7) Calculer la dérivée de $h(x) = \frac{1}{2x - 3}$ sur un intervalle où $2x - 3 \neq 0$. On écrira d'abord $h(x) = (2x - 3)^{-1}$.
- 8) Calculer la dérivée de $k(x) = \sin(2x)$ et celle de $\ell(x) = \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Exercice 2 : L'éclairage d'un poste de travail

6 points

Un projecteur à LED éclaire un poste de travail. L'éclairement reçu, exprimé en lux, dépend de la distance d entre le projecteur et le plan de travail, exprimée en mètres. Il est modélisé, pour $d \geq 0$, par

$$I(d) = \frac{900}{(d + 1)^2}.$$

- 1) Calculer l'éclairement pour $d = 0$, puis pour $d = 5$ mètres.
- 2) Écrire $I(d)$ sous la forme $900 \times (d + 1)^{-2}$, puis identifier les deux fonctions dont I est la composée.
- 3) En utilisant la dérivée d'une fonction composée, montrer que $I'(d) = -\frac{1800}{(d + 1)^3}$.
- 4) Déterminer le signe de $I'(d)$ pour $d \geq 0$, puis en déduire le sens de variation de I . Interpréter ce résultat en une phrase.
- 5) La norme impose un éclairement d'au moins 100 lux sur le poste. Déterminer la distance maximale à laquelle le projecteur peut être installé. On donnera la valeur exacte.

Exercice 3 : L'ordre compte

6 points

On considère les fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 2x - 1$ et $v(x) = x^2$.

Le script Python ci-dessous compare les deux composées possibles.

```
def u(x) :  
    return 2 * x - 1  
  
def v(x) :  
    return x * x  
  
def comparer(debut, fin) :  
    x = debut  
    egaux = []  
    while x <= fin :  
        if v(u(x)) == u(v(x)) :  
            egaux.append(x)  
        x = x + 1  
    return egaux
```

- 1) Calculer $(v \circ u)(3)$ et $(u \circ v)(3)$. Ces deux nombres sont-ils égaux ?
- 2) Exprimer $(v \circ u)(x)$ puis $(u \circ v)(x)$ en fonction de x , sous forme développée.
- 3) Résoudre l'équation $(v \circ u)(x) = (u \circ v)(x)$.
- 4) Que renvoie l'appel `comparer(-3, 3)` ? Justifier à partir de la question précédente.
- 5) Le script ne teste que des valeurs entières. Expliquer pourquoi il pourrait, sur un autre couple de fonctions, ne rien renvoyer alors que l'équation admet pourtant une solution.