

Exercice 1 : Une cuve de récupération d'eau de pluie

14 points

Partie A — Mise en équation

- 1) Le volume d'un cylindre est $\pi r^2 h$. La cuve doit contenir 1 mètre cube, donc $\pi r^2 h = 1$. Comme $r > 0$, le produit πr^2 est non nul et l'on peut diviser :

$$h = \frac{1}{\pi r^2}.$$

- 2) La surface totale est celle des deux disques de base plus celle de la surface latérale :

$$S = 2 \times \pi r^2 + 2\pi r h.$$

On remplace h par l'expression trouvée :

$$2\pi r h = 2\pi r \times \frac{1}{\pi r^2} = \frac{2\pi r}{\pi r^2} = \frac{2}{r},$$

d'où $S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2}{r}.$

Remarque : oublier l'un des deux disques est l'erreur la plus fréquente ; on obtiendrait alors $\pi r^2 + \frac{2}{r}$ et un résultat final différent.

- 3) Le second terme $\frac{2}{r}$ est un multiple de la fonction inverse. La fonction S est donc une combinaison linéaire de la fonction inverse et d'une fonction polynomiale (ici de degré 2) : c'est exactement le type de fonction au programme de ce chapitre.

Partie B — Étude de la fonction

- 4) La dérivée de $2\pi r^2$ est $4\pi r$; celle de $2 \times \frac{1}{r}$ est $2 \times \left(-\frac{1}{r^2}\right)$. Donc

$$S'(r) = 4\pi r - \frac{2}{r^2}.$$

- 5) On résout, pour $r > 0$:

$$4\pi r - \frac{2}{r^2} = 0 \iff 4\pi r = \frac{2}{r^2}.$$

En multipliant les deux membres par r^2 (strictement positif, l'équivalence est conservée) :

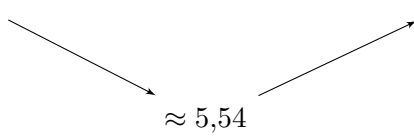
$$4\pi r^3 = 2 \iff r^3 = \frac{1}{2\pi}.$$

- 6) $\frac{1}{2\pi} \approx 0,159\,155$. À la calculatrice, $r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} \approx 0,542$ mètre (arrondi à 10^{-3} près).

- 7) Réduisons au même dénominateur :

$$S'(r) = \frac{4\pi r^3 - 2}{r^2}.$$

Pour $r > 0$, le dénominateur r^2 est strictement positif : $S'(r)$ est du signe de $4\pi r^3 - 2$. Comme $r \mapsto r^3$ est croissante sur $]0; +\infty[$, cette expression est négative pour $r < \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$, nulle en ce point, positive ensuite. On note $r_0 = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} \approx 0,542$.

r	0	$r_0 \approx 0,542$	$+\infty$
$S'(r)$		- 0 +	
S			

8) S est décroissante puis croissante : elle atteint son minimum en r_0 . La surface minimale vaut

$$S(r_0) = 2\pi \times 0,542^2 + \frac{2}{0,542} \approx 1,846 + 3,690 \approx \boxed{5,54 \text{ m}^2}.$$

Le rayon optimal est donc $\boxed{r \approx 0,542 \text{ m}}$.

Partie C – Exploitation

9) $h = \frac{1}{\pi r_0^2} = \frac{1}{\pi \times 0,542^2} \approx \boxed{1,084 \text{ m}}$ (arrondi à 10^{-3} près).

10) **Question ouverte.** On veut montrer que $h = 2r$ pour la cuve optimale.

Au point optimal, on a établi que $r^3 = \frac{1}{2\pi}$, c'est-à-dire $\pi r^3 = \frac{1}{2}$.

Or la hauteur vaut $h = \frac{1}{\pi r^2}$. Calculons le rapport $\frac{h}{r}$:

$$\frac{h}{r} = \frac{1}{\pi r^2} \times \frac{1}{r} = \frac{1}{\pi r^3} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

Donc $h = 2r$, et comme $2r$ est précisément le diamètre de la base,

$\boxed{\text{la hauteur de la cuve optimale est égale à son diamètre.}}$

Vérification numérique : $2 \times 0,542 = 1,084$, ce qui est bien la hauteur calculée à la question précédente.

Remarque : ce résultat est exact et ne dépend pas du volume choisi. Une cuve cylindrique fermée de volume quelconque est toujours la plus économique en tôle lorsqu'elle est aussi haute que large – autrement dit lorsqu'elle est « carrée » vue de profil.

11) Pour $r = 0,40$:

$$S(0,40) = 2\pi \times 0,40^2 + \frac{2}{0,40} \approx 1,005 + 5 = \boxed{6,01 \text{ m}^2}.$$

Écart avec la surface minimale : $6,01 - 5,54 = 0,47 \text{ m}^2$, soit

$$\frac{6,005 - 5,536}{5,536} \approx 0,085 = \boxed{8,5 \%} \text{ de tôle en plus.}$$

Le surcoût n'est pas négligeable : près de 9 % de matière supplémentaire pour la même contenance. Sur une commande de plusieurs dizaines de cuves, cela représente une dépense et un poids évitables. La forme optimale mérite donc d'être imposée au fournisseur.

Exercice 2 : L'encrassement d'une pompe de relevage

6 points

1) Diminuer de 5 % revient à multiplier par $1 - 0,05 = 0,95$.

$$d_1 = 45 \times 0,95 = \boxed{42,75} \quad d_2 = 42,75 \times 0,95 = 40,6125 \approx \boxed{40,61}$$

(débits en mètres cubes par heure, arrondis à 10^{-2} près).

- 2) On passe d'un terme au suivant en multipliant *toujours par le même nombre* $0,95$: $d_{n+1} = 0,95 d_n$ pour tout entier n . La suite (d_n) est donc géométrique de raison $0,95$, de premier terme $d_0 = 45$.
- 3) Pour une suite géométrique, $d_n = d_0 \times q^n$, donc

$$\boxed{d_n = 45 \times 0,95^n}.$$

- 4) À la calculatrice, on lit le tableau de valeurs de d_n :

$$d_5 = 45 \times 0,95^5 \approx 34,82 \quad \text{et} \quad d_6 = 45 \times 0,95^6 \approx 33,08.$$

On a $d_5 \approx 34,82 \geq 34$ et $d_6 \approx 33,08 < 34$: le seuil est franchi pour la première fois au rang 6. Le nettoyage devient nécessaire au bout de 6 mois.

- 5) Le volume total est $200 \times (d_0 + d_1 + \dots + d_{11})$, c'est-à-dire 200 fois la somme des 12 premiers termes de la suite géométrique :

$$d_0 + \dots + d_{11} = 45 \times \frac{1 - 0,95^{12}}{1 - 0,95} = 45 \times \frac{1 - 0,540360}{0,05} \approx 413,68.$$

Volume total : $200 \times 413,68 \approx$ $82\,735 \text{ m}^3$.

Attention : il y a bien 12 termes, des rangs 0 à 11, et non 11.

- 6) À débit constant, le volume serait $200 \times 45 \times 12 =$ $108\,000 \text{ m}^3$.
La perte due à l'encrassement est donc

$$\frac{108\,000 - 82\,735}{108\,000} \approx 0,2339 = \boxed{23,4 \%}.$$

Près d'un quart de la capacité de pompage est perdu sur une seule année : c'est ce qui justifie l'entretien périodique imposé par la notice.