

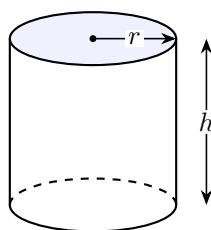
Calculatrice autorisée (mode examen)

Exercice 1 : Une cuve de récupération d'eau de pluie

14 points

Un lycée technologique fait fabriquer une cuve destinée à récupérer l'eau de pluie. La cuve a la forme d'un **cylindre fermé**, de rayon r et de hauteur h , exprimés en mètres. Elle doit contenir exactement 1 mètre cube d'eau.

La cuve est entièrement réalisée en tôle. L'atelier cherche la forme qui minimise la **surface de tôle** utilisée, c'est-à-dire la somme de l'aire des deux disques de base et de l'aire de la surface latérale.



Cuve cylindrique fermée, de volume 1 m^3

Rappels : un cylindre de rayon r et de hauteur h a pour volume $\pi r^2 h$; l'aire de sa surface latérale est $2\pi r h$; l'aire d'un disque de rayon r est πr^2 .

Partie A – Mise en équation (4 points)

- 1) Justifier que, pour tout $r > 0$, la hauteur de la cuve est donnée par $h = \frac{1}{\pi r^2}$.
- 2) On note $S(r)$ la surface totale de tôle, en mètres carrés. Montrer que, pour tout $r > 0$,

$$S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2}{r}.$$

- 3) Quelle fonction de référence reconnaît-on dans le second terme? En quoi le problème relève-t-il du chapitre étudié?

Partie B – Étude de la fonction (6 points)

- 4) Calculer $S'(r)$ pour $r > 0$.
- 5) Montrer que $S'(r) = 0$ équivaut à $r^3 = \frac{1}{2\pi}$.
- 6) À l'aide de la calculatrice, donner la valeur de r solution de cette équation, *arrondie à 10^{-3} près*.
- 7) Étudier le signe de $S'(r)$ sur $]0; +\infty[$ et dresser le tableau de variations de S . *On ne demande pas les valeurs aux bornes*.
- 8) En déduire la valeur de r qui minimise la surface de tôle, puis la surface correspondante *arrondie à 10^{-2} près*.

Partie C – Exploitation (4 points)

- 9) Calculer la hauteur h de la cuve optimale, *arrondie à 10^{-3} près*.
- 10) *Question ouverte*. Démontrer que, pour la cuve de surface minimale, la hauteur est égale au diamètre. *Aucune indication n'est donnée : la démarche fait partie de l'évaluation*.

- 11) Un fournisseur propose une cuve cylindrique de 1 mètre cube, de rayon 0,40 mètre. Calculer la surface de tôle de cette cuve, *arrondie à 10^{-2} près*, et la comparer à la surface minimale. Le surcoût de matière vous paraît-il négligeable ? Justifier par un pourcentage.

Exercice 2 : L'encrassement d'une pompe de relevage

6 points

Cet exercice porte sur le chapitre « Suites arithmétiques et géométriques ».

Le même établissement dispose d'un **bassin de rétention** des eaux pluviales, vidangé en continu par une pompe de relevage. Au moment de sa mise en service, cette pompe débite 45 mètres cubes par heure. À cause de l'encrassement progressif du filtre, son débit diminue de 5 % chaque mois.

On note d_n le débit de la pompe, en mètres cubes par heure, au bout de n mois de fonctionnement. Ainsi $d_0 = 45$.

- 1) Calculer d_1 et d_2 , *arrondis à 10^{-2} près*.
- 2) Justifier que (d_n) est une suite géométrique, et préciser sa raison.
- 3) Exprimer d_n en fonction de n .
- 4) La notice impose un nettoyage du filtre dès que le débit devient strictement inférieur à 34 mètres cubes par heure. À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien de mois le nettoyage devient nécessaire. *On justifiera en donnant les deux valeurs de d_n qui encadrent le seuil.*
- 5) La pompe fonctionne 200 heures par mois. On admet que, pendant le mois numéro n , elle débite $200 d_n$ mètres cubes.
Calculer le volume total pompé pendant les douze premiers mois (des mois 0 à 11), *arrondi au mètre cube*.
- 6) Quel volume aurait été pompé sur ces douze mois si le débit était resté constant à 45 mètres cubes par heure ? En déduire, *en pourcentage arrondi à 0,1 % près*, la perte de production due à l'encrassement.