

Exercice 1 : Quatre questions indépendantes

8 points

1) Réponse A.

$$f(x) = 3x - 12 \times \frac{1}{x}, \text{ donc } f'(x) = 3 - 12 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \boxed{3 + \frac{12}{x^2}}.$$

Pour tout $x > 0$ on a $\frac{12}{x^2} > 0$, donc $f'(x) > 3 > 0$: la dérivée est strictement positive sur tout l'intervalle, et f est croissante sur $]0; +\infty[$.

Le piège : le signe $-$ devant $\frac{12}{x}$ devient un signe $+$ après dérivation. Beaucoup d'élèves écrivent $3 - \frac{12}{x^2}$ et concluent à la réponse D.

2) a. Pour $x > 0$ on sépare le quotient :

$$g(x) = \frac{x^3 + 2}{x} = \frac{x^3}{x} + \frac{2}{x} = \boxed{x^2 + \frac{2}{x}}.$$

b. On dérive terme à terme : la dérivée de x^2 est $2x$, celle de $2 \times \frac{1}{x}$ est $2 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)$. Donc

$$\boxed{g'(x) = 2x - \frac{2}{x^2}}.$$

3) $k(x) = ax + \frac{b}{x}$. Les deux lectures graphiques donnent un système :

$$\begin{cases} k(1) = a + b = 7 \\ k(2) = 2a + \frac{b}{2} = 8 \end{cases}$$

De la première équation, $b = 7 - a$. En reportant dans la seconde :

$$2a + \frac{7-a}{2} = 8 \iff 4a + 7 - a = 16 \iff 3a = 9 \iff a = 3,$$

puis $b = 7 - 3 = 4$. Donc $a = 3$ et $b = 4$, c'est-à-dire $k(x) = 3x + \frac{4}{x}$.

Vérification : $k(1) = 3 + 4 = 7$ et $k(2) = 6 + 2 = 8$. Les deux points lus sur la courbe sont bien retrouvés.

4) On résout $\frac{60}{x} + 4 = 9,5$:

$$\frac{60}{x} = 5,5 \iff x = \frac{60}{5,5} = \frac{120}{11}.$$

La valeur exacte est $\frac{120}{11}$, et l'arrondi demandé à 10^{-2} près donne $x \approx 10,91$.

Exercice 2 : Le coût d'une pièce imprimée en 3D

8 points

1) $C(10) = 0,5 \times 10^2 + 8 \times 10 + 200 = 50 + 80 + 200 = \boxed{330 \text{ euros}}$.

Le coût moyen d'une pièce est $\frac{330}{10} = \boxed{33 \text{ euros}}$.

- 2) Par définition, $C_m(q) = \frac{C(q)}{q}$. On sépare les trois termes :

$$C_m(q) = \frac{0,5q^2 + 8q + 200}{q} = \frac{0,5q^2}{q} + \frac{8q}{q} + \frac{200}{q} = 0,5q + 8 + \frac{200}{q}.$$

On reconnaît une combinaison linéaire d'une fonction affine et de la fonction inverse.

- 3) a. La dérivée de $0,5q$ est $0,5$, celle de la constante 8 est nulle, et celle de $200 \times \frac{1}{q}$ est $200 \times \left(-\frac{1}{q^2}\right)$. Donc

$$C'_m(q) = 0,5 - \frac{200}{q^2}.$$

- b. $C'_m(q) = 0 \iff \frac{200}{q^2} = 0,5 \iff q^2 = \frac{200}{0,5} \iff q^2 = 400$.

Sur $]0; +\infty[$, la seule solution est $q = 20$ (la solution -20 est hors de l'intervalle, et n'aurait de toute façon aucun sens pour un nombre de pièces).

- c. Réduisons au même dénominateur : $C'_m(q) = \frac{0,5q^2 - 200}{q^2}$. Le dénominateur q^2 est strictement positif, donc $C'_m(q)$ est du signe de $0,5q^2 - 200$, c'est-à-dire du signe de $q^2 - 400$: négatif pour $0 < q < 20$, nul en $q = 20$, positif pour $q > 20$.

q	0	20	$+\infty$
$C'_m(q)$		-	+
C_m		28	

- 4) C_m est décroissante puis croissante : elle atteint son minimum en $q = 20$. Ce minimum vaut

$$C_m(20) = 0,5 \times 20 + 8 + \frac{200}{20} = 10 + 8 + 10 = 28 \text{ euros}.$$

La série la plus économique est donc celle de 20 pièces, pour un coût moyen de 28 euros par pièce.

- 5) Recette : $20 \times 32 = 640$ euros. Coût : $C(20) = 0,5 \times 400 + 8 \times 20 + 200 = 200 + 160 + 200 = 560$ euros.

Bénéfice sur la série : $640 - 560 = 80$ euros.

- 6) L'affirmation est fausse. Elle n'est exacte que jusqu'à $q = 20$: sur $]0; 20[$ le coût moyen décroît effectivement, mais au-delà de 20 pièces il remonte.

Ce qui le fait remonter, c'est le terme $0,5q$: le coût de fabrication de chaque pièce supplémentaire augmente avec la taille de la série (usure, temps machine), et finit par l'emporter sur l'économie réalisée en répartissant les 200 euros de réglage sur davantage de pièces. Les deux effets se compensent exactement en $q = 20$.

Exercice 3 : La copie d'un élève

4 points

- 1) Oui, cette partie est correcte. $u(x) = x + \frac{1}{x}$ donne bien $u'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$, et $u'(x) = 0 \iff \frac{1}{x^2} = 1 \iff x^2 = 1 \iff x = 1$ ou $x = -1$. L'erreur n'est pas dans le calcul.

2) $u(3) = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3} \approx 3,33$.

Or la copie affirme que $u(x) \leq 2$ pour tout x non nul. Comme $\frac{10}{3} > 2$, ce seul calcul suffit à réfuter la dernière phrase : un contre-exemple suffit toujours à démolir une affirmation universelle.

3) L'élève a traité $\mathbb{R}^*$ comme un seul intervalle. Or u n'est pas définie en 0, et son ensemble de définition est la réunion de deux intervalles disjoints, $] -\infty ; 0[$ et $] 0 ; +\infty[$. On ne peut pas comparer des valeurs prises de part et d'autre de 0 comme s'il s'agissait d'une seule courbe.

De plus il a inversé la nature des deux extremums : sur la branche négative, u passe par un *maximum* en $x = -1$; sur la branche positive, par un *minimum* en $x = 1$. Le « minimum -2 » qu'il annonce est en réalité un maximum local, et il ne vaut que sur $] -\infty ; 0[$.

4) **Conclusion correcte.**

sur $] 0 ; +\infty[$: minimum local 2 en $x = 1$ sur $] -\infty ; 0[$: maximum local -2 en $x = -1$
--

En revanche, u n'admet ni minimum ni maximum sur $\mathbb{R}^*$: quand x devient très grand, $u(x)$ devient aussi grand que l'on veut, et quand x est négatif et très proche de 0, $u(x)$ devient aussi petit que l'on veut.