

Calculatrice autorisée (mode examen)

Exercice 1 : Quatre questions indépendantes

8 points

Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes les unes des autres.

- 1) Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 3x - \frac{12}{x}$.

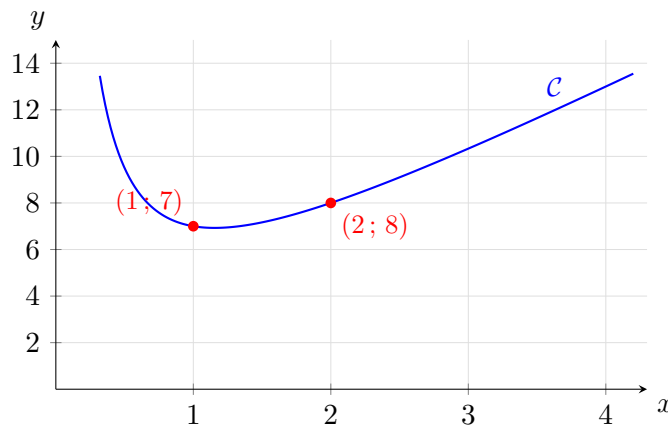
QCM. Parmi les quatre propositions suivantes, une seule est exacte. Indiquer la lettre de la réponse exacte en expliquant votre choix.

- A. f est croissante sur $]0; +\infty[$. B. f est décroissante sur $]0; +\infty[$.
C. f est croissante puis décroissante. D. f est décroissante puis croissante.

- 2) Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{x^3 + 2}{x}$.

- a. Montrer que, pour tout $x > 0$, $g(x) = x^2 + \frac{2}{x}$.
b. En déduire $g'(x)$.

- 3) La courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous représente une fonction k définie sur $]0; +\infty[$ par $k(x) = ax + \frac{b}{x}$, où a et b sont deux réels. On lit sur le graphique que $k(1) = 7$ et $k(2) = 8$. Déterminer les valeurs de a et de b .



- 4) Une fonction m est définie sur $]0; +\infty[$ par $m(x) = \frac{60}{x} + 4$. Déterminer, en arrondissant à 10^{-2} près, la valeur de x pour laquelle $m(x) = 9,5$.

Exercice 2 : Le coût d'une pièce imprimée en 3D

8 points

Un *fablab* imprime en trois dimensions des pièces de rechange à la demande. Pour une série de q pièces identiques (q entier, $q \geq 1$), le coût total de production, exprimé en euros, est modélisé par

$$C(q) = 0,5q^2 + 8q + 200.$$

Le terme constant 200 correspond au réglage de la machine et au démarrage de la série; il est payé une seule fois, quelle que soit la taille de la série.

On appelle **coût moyen** d'une pièce le quotient du coût total par le nombre de pièces produites. On le note $C_m(q)$.

- 1) Calculer le coût total d'une série de 10 pièces, puis le coût moyen d'une pièce dans cette série.
- 2) Montrer que, pour tout réel $q > 0$,

$$C_m(q) = 0,5q + 8 + \frac{200}{q}.$$

- 3) On étudie désormais C_m comme une fonction définie sur $]0; +\infty[$.
 - a. Calculer $C'_m(q)$.
 - b. Montrer que $C'_m(q) = 0$ équivaut à $q^2 = 400$, puis résoudre cette équation sur $]0; +\infty[$.
 - c. Étudier le signe de $C'_m(q)$ et dresser le tableau de variations de C_m sur $]0; +\infty[$.
- 4) En déduire la taille de série qui rend le coût moyen d'une pièce minimal, ainsi que ce coût moyen minimal.
- 5) Le fablab vend chaque pièce 32 euros. Pour une série de 20 pièces, calculer le bénéfice réalisé sur la série entière.
- 6) Un responsable affirme : « *plus on produit de pièces, moins chaque pièce revient cher* ». Cette affirmation est-elle exacte ? Justifier à l'aide du tableau de variations, et expliquer en une phrase ce qui, dans le modèle, fait remonter le coût moyen.

Exercice 3 : La copie d'un élève

4 points

Un élève doit étudier les variations de la fonction u définie sur $\mathbb{R}^*$ par $u(x) = x + \frac{1}{x}$. Voici sa copie.

« La dérivée de u est $u'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$.
 Elle s'annule quand $x^2 = 1$, c'est-à-dire pour $x = 1$ et pour $x = -1$.
 Comme $u(1) = 2$ et $u(-1) = -2$, la fonction u admet un minimum égal à -2 , atteint en $x = -1$, et un maximum égal à 2 , atteint en $x = 1$.
 Donc pour tout réel x non nul, $-2 \leq u(x) \leq 2$. »

- 1) Le calcul de la dérivée et la résolution de $u'(x) = 0$ sont-ils corrects ?
- 2) Calculer $u(3)$. Que peut-on en conclure sur la dernière phrase de la copie ?
- 3) Expliquer l'erreur de raisonnement commise par l'élève.
- 4) Rédiger une conclusion correcte concernant les extremums de u .