

Exercice 1 : La fonction inverse, de près

8 points

Partie A

- 1) **Fausse.** C'est l'erreur la plus fréquente sur ce chapitre. La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty; 0[$ et décroissante sur $]0; +\infty[$, mais elle n'est pas décroissante sur la réunion des deux. Contre-exemple : $-1 < 1$, or $f(-1) = -1$ et $f(1) = 1$, donc $f(-1) < f(1)$. Une fonction décroissante aurait donné $f(-1) > f(1)$.

À retenir : on ne décrit jamais les variations de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^*$ d'un seul tenant.

- 2) **Vraie.** C'est le résultat du cours : pour $x \neq 0$, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$. On peut le retrouver par le taux de variation : pour $h \neq 0$,

$$\frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \frac{\frac{x - (x+h)}{x(x+h)}}{h} = \frac{-h}{hx(x+h)} = \frac{-1}{x(x+h)},$$

et lorsque h devient très proche de 0, cette expression se rapproche de $-\frac{1}{x^2}$.

- 3) **Vraie.** Par exemple $\frac{1}{0,001} = 1\,000$ et $\frac{1}{0,000\,01} = 100\,000$. Plus le nombre positif est proche de 0, plus son inverse est grand : c'est ce que traduit l'allure de la courbe, qui s'élève sans limite au voisinage de 0.

- 4) **Fausse.** Couper l'axe des abscisses signifierait qu'il existe un réel $x \neq 0$ tel que $\frac{1}{x} = 0$. Or un quotient est nul seulement si son numérateur est nul, et ici le numérateur vaut 1. L'équation $\frac{1}{x} = 0$ n'a aucune solution : la courbe ne rencontre jamais l'axe des abscisses.

Partie B

- 5) $f(x) = 2x + 3 \times \frac{1}{x}$. La dérivée de $2x$ est 2, celle de $3 \times \frac{1}{x}$ est $3 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)$. Donc

$$f'(x) = 2 - \frac{3}{x^2}.$$

- 6) De même, la dérivée de x^2 est $2x$ et celle de $-\frac{4}{x}$ est $-4 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = +\frac{4}{x^2}$. Attention au signe : soustraire $\frac{4}{x}$ fait apparaître un terme positif dans la dérivée.

$$g'(x) = 2x + \frac{4}{x^2}.$$

- 7) On résout sur $]0; +\infty[$:

$$2 - \frac{3}{x^2} = 0 \iff \frac{3}{x^2} = 2 \iff x^2 = \frac{3}{2}.$$

Sur $]0; +\infty[$ la seule solution est $x = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ (valeur approchée 1,22). La solution négative $-\frac{\sqrt{6}}{2}$ est écartée par l'intervalle d'étude.

Exercice 2 : Un gaz sous pression

6 points

- 1) De $P \times V = 240$ avec $V = 4$ on tire $P = \frac{240}{4} = \boxed{60 \text{ bars}}$.
- 2) Pour $V > 0$ on divise les deux membres par V : $P(V) = \frac{240}{V}$. On reconnaît la **fonction inverse**, multipliée par le coefficient 240.
- 3) $P(V) = 240 \times \frac{1}{V}$, donc $P'(V) = -\frac{240}{V^2}$. Pour tout $V > 0$, $V^2 > 0$ et donc $\frac{240}{V^2} > 0$: la dérivée est **strictement négative** sur $]0; +\infty[$.
- 4) Une dérivée strictement négative signifie que P est **strictement décroissante** sur $]0; +\infty[$.
Interprétation : *plus on laisse de volume au gaz, plus sa pression est faible* – et inversement, comprimer le gaz dans un volume plus petit fait monter la pression.
- 5) Lorsque V devient très proche de 0, $\frac{240}{V}$ devient **arbitrairement grand** : le modèle prévoit une pression sans limite.
Or un gaz réel ne peut pas être comprimé indéfiniment : à forte pression il se liquéfie, et le volume propre des molécules n'est plus négligeable. La relation $PV = 240$ n'est donc valable que **dans une plage de volumes raisonnable**. C'est une limite du modèle, pas un défaut du calcul : la fonction inverse, elle, est parfaitement définie pour tout $V > 0$.

Exercice 3 : Chercher un minimum par balayage

6 points

- 1) $h(0,5) = 0,5 + \frac{4}{0,5} = 0,5 + 8 = \boxed{8,5}$; $h(2) = 2 + \frac{4}{2} = \boxed{4}$; $h(4) = 4 + \frac{4}{4} = \boxed{5}$.
- 2) La variable x part de 0,5 et augmente de 0,5 à chaque tour tant qu'elle reste inférieure ou égale à 5 : elle prend les valeurs

0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; 4; 4,5; 5,

soit **10 valeurs**.

- 3) meilleur_h conserve **la plus petite valeur de h rencontrée jusque-là**; meilleur_x retient l'abscisse correspondante.
Elle est initialisée à $h(0,5) = 8,5$, c'est-à-dire à une valeur *effectivement prise* par h . Si on l'initialisait à 0, aucune valeur de h ne lui serait jamais inférieure – sur $]0; +\infty[$ on a toujours $h(x) > 0$ – et le test `if h < meilleur_h` ne serait jamais vrai : le script renverrait 0, qui n'est pas un minimum de h .
- 4) $h(x) = x + 4 \times \frac{1}{x}$ donc $h'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2}$.
Sur $]0; +\infty[$, le dénominateur x^2 est strictement positif : $h'(x)$ est du signe de $x^2 - 4$, qui s'annule en $x = 2$ (la racine -2 est hors de l'intervalle), est négatif avant et positif après.

$$h'(x) = 0 \iff x = 2$$

x	0	2	$+\infty$
$h'(x)$		– 0 +	
h		↙ 4 ↘	

h admet donc un minimum en $x = 2$, qui vaut $h(2) = 4$: c'est bien le couple $(2 ; 4)$ renvoyé par le script.

5) Avec un pas de 0,4, la variable x prend les valeurs

0,5 ; 0,9 ; 1,3 ; 1,7 ; 2,1 ; 2,5 ...

Elle ne prend jamais la valeur 2. Le script ne peut donc pas trouver le minimum exact, puisqu'il ne teste que les abscisses qu'il visite.

La plus petite valeur rencontrée serait obtenue en $x = 2,1$, avec $h(2,1) = 2,1 + \frac{4}{2,1} \approx 4,005$. Le script renverrait donc `meilleur_x = 2,1` au lieu de 2.

Le balayage donne une valeur *approchée* du minimum ; seul le calcul de la dérivée en donne la valeur *exacte*. C'est toute la différence entre les deux méthodes.