

Calculatrice autorisée (mode examen)

Exercice 1 : La fonction inverse, de près

8 points

Partie A – Vrai ou faux (4 points)

Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse. **Toute réponse doit être justifiée** : une justification peut être un calcul, une propriété du cours ou un contre-exemple.

- 1) La fonction inverse est décroissante sur son ensemble de définition.
- 2) Pour tout réel x non nul, la fonction dérivée de $x \mapsto \frac{1}{x}$ est $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$.
- 3) L'inverse d'un nombre strictement positif et très proche de 0 est un nombre très grand.
- 4) La courbe représentative de la fonction inverse coupe l'axe des abscisses en un point.

Partie B – Calculs (4 points)

- 5) On pose $f(x) = 2x + \frac{3}{x}$ pour $x \neq 0$. Calculer $f'(x)$.
- 6) On pose $g(x) = x^2 - \frac{4}{x}$ pour $x \neq 0$. Calculer $g'(x)$.
- 7) Résoudre dans $]0; +\infty[$ l'équation $f'(x) = 0$, où f est la fonction de la question 5. On donnera la valeur exacte.

Exercice 2 : Un gaz sous pression

6 points

Dans un vérin pneumatique, une quantité fixée de gaz est comprimée à température constante. La pression P du gaz, exprimée en bars, et le volume V qu'il occupe, exprimé en litres, sont liés par la relation $P \times V = 240$.

- 1) Le gaz occupe un volume de 4 litres. Calculer la pression correspondante.
- 2) Exprimer P en fonction de V pour $V > 0$. Quelle fonction de référence reconnaît-on ?
- 3) On note $P(V) = \frac{240}{V}$. Calculer $P'(V)$, puis déterminer le signe de $P'(V)$ sur $]0; +\infty[$.
- 4) En déduire le sens de variation de P sur $]0; +\infty[$, puis interpréter ce résultat en une phrase pour l'utilisateur du vérin.
- 5) Que devient la pression lorsque le volume devient très proche de 0 ? Expliquer pourquoi le modèle cesse alors de décrire correctement le gaz réel.

Exercice 3 : Chercher un minimum par balayage

6 points

On s'intéresse à la fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = x + \frac{4}{x}$.

Le script Python ci-dessous parcourt des valeurs de x et conserve la plus petite valeur de $h(x)$ rencontrée.

```
def minimum() :  
    x = 0.5  
    meilleur_x = 0.5  
    meilleur_h = 0.5 + 4 / 0.5  
    while x <= 5 :  
        h = x + 4 / x  
        if h < meilleur_h :  
            meilleur_h = h  
            meilleur_x = x  
        x = x + 0.5  
    return meilleur_x, meilleur_h
```

- 1) Calculer $h(0,5)$, $h(2)$ et $h(4)$. On donnera les valeurs exactes.
- 2) Quelles sont les valeurs successives prises par la variable x au cours de l'exécution ? Combien y en a-t-il ?
- 3) Quel est le rôle de la variable `meilleur_h` ? Pourquoi est-elle initialisée à $h(0,5)$ et non à 0 ?
- 4) Le script renvoie le couple (2 ; 4). Retrouver ce résultat par le calcul : calculer $h'(x)$, résoudre $h'(x) = 0$ sur $]0; +\infty[$, puis dresser le tableau de variations de h sur cet intervalle.
- 5) Le script trouve ici le minimum exact de h . Expliquer pourquoi ce ne serait plus le cas si l'on remplaçait la ligne $x = x + 0.5$ par $x = x + 0.4$. On précisera la valeur de `meilleur_x` que renverrait alors le script.