

Calculatrice autorisée (mode examen)

Exercice 1 : Deux scénarios pour une unité de méthanisation**14 points**

Une unité de méthanisation agricole produit $4\,200\text{ m}^3$ de biogaz le premier mois de son exploitation. L'exploitant étudie deux scénarios d'augmentation de la production pour les mois suivants. On note n le nombre de mois écoulés depuis le premier mois ; ainsi $n = 0$ correspond au premier mois.

- **Scénario A** : la production augmente de 250 m^3 chaque mois.
- **Scénario B** : la production augmente de $4,5\%$ chaque mois.

Partie A — modéliser

- 1) Pour chacun des deux scénarios, préciser la nature de la suite qui modélise la production mensuelle, et donner sa raison. Justifier.
- 2) On note $a(n)$ la production du mois de rang n dans le scénario A, et $b(n)$ celle du scénario B. Exprimer $a(n)$ et $b(n)$ en fonction de n .
- 3) Calculer la production du douzième mois dans chacun des deux scénarios, en m^3 arrondis à l'unité.

Partie B — comparer

- 4) Recopier et compléter le tableau ci-dessous. Arrondir à l'unité.

Rang n	0	4	8	12	14	16
$a(n)$	4 200					
$b(n)$	4 200					

- 5) À partir de quel rang la production mensuelle du scénario B dépasse-t-elle celle du scénario A ?
- 6) Un ingénieur affirme : « le scénario B est une croissance exponentielle, il est donc plus avantageux que le scénario A dès le départ ». **Justifier** que cette affirmation est fausse, puis expliquer en une phrase ce qui reste vrai dans son intuition.

Partie C — décider

L'exploitant s'est engagé à livrer $66\,000\text{ m}^3$ de biogaz sur les douze premiers mois.

- 7) Calculer la production totale des douze premiers mois dans le scénario A.
- 8) Calculer la production totale des douze premiers mois dans le scénario B. Arrondir à l'unité.
- 9) Quel scénario permet d'honorer l'engagement ? Justifier.
- 10) Ce résultat peut sembler contredire la réponse de la partie B. **Expliquer pourquoi il n'en est rien**, sans nouveau calcul.

Exercice 2 : Un bénéfice à optimiser**6 points**

Cet exercice mobilise la dérivation, étudiée en classe de première.

Une entreprise fabrique des modules de régulation. Lorsqu'elle en produit x centaines par mois, avec $x \in [0 ; 10]$, son bénéfice mensuel, en milliers d'euros, est donné par

$$f(x) = -x^3 + 9x^2 + 21x.$$

- 1) Calculer $f'(x)$, puis vérifier que $f'(x) = -3(x - 7)(x + 1)$.
- 2) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0 ; 10]$ et dresser le tableau de variations de f .
- 3) En déduire la production mensuelle qui rend le bénéfice maximal, ainsi que ce bénéfice.
- 4) Calculer $f(1)$, $f(2)$ et $f(3)$. Ces trois nombres sont-ils trois termes consécutifs d'une suite arithmétique ? d'une suite géométrique ? Justifier.
- 5) L'entreprise souhaite connaître le bénéfice cumulé $f(1) + f(2) + \dots + f(10)$. Peut-on l'obtenir à l'aide d'une formule de somme de suite arithmétique ou géométrique ? Justifier.