

Exercice 1

8 points

- 1) Pour passer de $u(0)$ à $u(12)$ on ajoute douze fois la raison : $u(12) = u(0) + 12r$, donc $38 = 2 + 12r$, d'où $12r = 36$ et $r = \boxed{3}$. Par conséquent $u(n) = 2 + 3n$.

- 2) C'est la somme des termes d'une suite arithmétique de premier terme 1, de dernier terme 50 et de 50 termes :

$$\sum_{k=1}^{50} k = 50 \times \frac{1+50}{2} = 25 \times 51 = \boxed{1275}.$$

- 3) **Réponse a.** Pour une suite géométrique, $w(4) = w(0) \times q^4$, donc $405 = 5 \times q^4$ et $q^4 = \frac{405}{5} = 81$.

Comme $3^4 = 81$, on obtient $q = \boxed{3}$.

Les trois autres propositions correspondent chacune à une erreur repérable : 81 est le coefficient sur quatre rangs, c'est-à-dire q^4 et non q ; 20,25 est $\frac{81}{4}$, obtenu en divisant par l'exposant au lieu d'extraire une racine; 9 est q^2 , soit une racine de trop peu.

- 4) Diminuer de 2 %, c'est multiplier par $1 - 0,02 = 0,98$: la suite des effectifs est géométrique de raison 0,98, donc

$$p(n) = 15\,000 \times 0,98^n \quad \text{et} \quad p(10) = 15\,000 \times 0,98^{10} \approx \boxed{12\,256 \text{ habitants}}.$$

(On remarquera que la population n'a pas perdu 20 % mais environ 18,3 % : les baisses successives ne s'additionnent pas.)

Exercice 2 : Un plan d'épargne

8 points

- 1) Le versement de la fin de la 9^e année reste placé pendant une année entière avant la fin du plan : il est donc multiplié une fois par 1,025, d'où $c_9 = 1\,500 \times 1,025 = 1\,537,50$ €.

Celui de la fin de la 8^e année reste placé deux ans : $c_8 = 1\,500 \times 1,025^2 \approx \boxed{1\,575,94 \text{ €}}$.

- 2) Le versement de la fin de la k -ième année reste placé pendant $10 - k$ années, donc

$$c_k = 1\,500 \times 1,025^{10-k}.$$

- 3) Quand k va de 1 à 10, l'exposant $10 - k$ va de 9 à 0. La somme C regroupe donc les nombres $1\,500 \times 1,025^0, 1\,500 \times 1,025^1, \dots, 1\,500 \times 1,025^9$: ce sont les termes d'une suite géométrique de premier terme 1 500, de raison 1,025 et comportant 10 termes.

- 4)

$$C = 1\,500 \times \frac{1 - 1,025^{10}}{1 - 1,025} = 1\,500 \times \frac{1 - 1,280\,084\dots}{-0,025} \approx \boxed{16\,805,07 \text{ €}}.$$

- 5) Le technicien a versé $10 \times 1\,500 = \boxed{15\,000 \text{ €}}$. Les intérêts rapportés s'élèvent donc à $16\,805,07 - 15\,000 = \boxed{1\,805,07 \text{ €}}$, soit $\frac{1\,805,07}{15\,000} \approx \boxed{12,0\%}$ du total versé.

- 6) Un versement unique de 15 000 € à l'ouverture reste placé les dix années entières :

$$15\,000 \times 1,025^{10} \approx \boxed{19\,201,27 \text{ €}},$$

soit $19\,201,27 - 16\,805,07 \approx 2\,396,20$ € de plus que le plan par versements.

L'écart s'explique par le temps de placement de chaque euro. Dans le plan par versements, **chaque somme n'est rémunérée que pour le temps qui lui reste** : le dernier versement ne rapporte rien du tout, l'avant-dernier une seule année, et seul le premier bénéficie de neuf années. C'est exactement ce que traduit l'exposant $10 - k$ de la question 2. À montant total identique, ce n'est donc pas le taux qui fait la différence, mais la *durée* pendant laquelle chaque euro travaille.

Exercice 3 : Où est l'erreur ?

4 points

- 1) La suite est arithmétique de premier terme 4 et de raison 5, donc $u(n) = 4 + 5n$.
 $u(3) = 4 + 15 = 19$ et $u(20) = 4 + 100 = 104$: les deux valeurs annoncées sont exactes.
- 2) Tous les termes $u(n) = 4 + 5n$ sont des **entiers**, et une somme d'entiers est un entier. Or l'élève annonce 1 045,5, qui n'en est pas un : le résultat est nécessairement faux. Ce contrôle ne coûte rien et se fait avant tout calcul – il ne dit pas où est l'erreur, mais il garantit qu'il y en a une.
- 3) L'erreur porte sur le **nombre de termes**. L'élève écrit $20 - 3 = 17$, alors que la somme va de l'indice 3 à l'indice 20 *bornes comprises* : elle comporte $20 - 3 + 1 =$ 18 termes. Oublier le terme initial est l'erreur la plus fréquente sur les sommes.
- 4) Le calcul correct est donc

$$S = 18 \times \frac{u(3) + u(20)}{2} = 18 \times \frac{19 + 104}{2} = 18 \times 61,5 = \boxed{1\,107}.$$

Le résultat est bien un entier, ce qui est cohérent avec la question 2. On peut le vérifier autrement : la moyenne des termes vaut 61,5, et 18 termes de moyenne 61,5 donnent 1 107.