

Partie A : Automatismes (QCM)

6 points

- 1) Réponse c. $225 \times \frac{\pi}{180} = \frac{225\pi}{180} = \frac{5\pi}{4}$.
- 2) Réponse a. $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$, donc $\cos \frac{2\pi}{3} = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.
- 3) Réponse d. $2 \times 3 + (-5) \times 1 = 6 - 5 = 1$.
- 4) Réponse b. $|5 - 12i| = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$. (169 est le carré du module.)
- 5) Réponse a. On change le signe de la partie imaginaire, et elle seule : $4 + 3i$.
- 6) Réponse b. C'est le produit d'un nombre par son conjugué : $(2 + i)(2 - i) = 2^2 - i^2 = 4 + 1 = 5$.
On retrouve $|2 + i|^2 = 5$.

Partie B : Exercice 1 — La marée dans un port

5 points

- 1) L'amplitude est le coefficient devant le cosinus : 2. La pulsation vaut $\omega = \frac{\pi}{6}$, donc

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \times \frac{6}{\pi} = 12 \text{ heures}.$$

- 2) $h(0) = 3 + 2 \cos(0) = 3 + 2 = 5$; $h(3) = 3 + 2 \cos \frac{\pi}{2} = 3 + 0 = 3$; $h(6) = 3 + 2 \cos \pi = 3 - 2 = 1$.

- 3) Le cosinus varie entre -1 et 1 , donc h varie entre $3 - 2 = 1$ et $3 + 2 = 5$: la hauteur d'eau est comprise entre 1 et 5 mètres.

Elle est maximale quand le cosinus vaut 1, c'est-à-dire pour $\frac{\pi t}{6} = 0$ ou 2π , soit $t = 0$ et $t = 12$ (minuit et midi) ; minimale quand le cosinus vaut -1 , soit $\frac{\pi t}{6} = \pi$, c'est-à-dire $t = 6$ (six heures du matin).

- 4) $h(t) = 4$ équivaut à $3 + 2 \cos \left(\frac{\pi t}{6} \right) = 4$, soit $\cos \left(\frac{\pi t}{6} \right) = \frac{1}{2}$.

Sur le cercle, le cosinus vaut $\frac{1}{2}$ pour les réels $\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$, c'est-à-dire aussi $\frac{5\pi}{3}$. Comme t parcourt $[0 ; 12]$, le réel $\frac{\pi t}{6}$ parcourt $[0 ; 2\pi]$: on obtient $\frac{\pi t}{6} = \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{\pi t}{6} = \frac{5\pi}{3}$, soit $t = 2$ ou $t = 10$.

- 5) La hauteur dépasse 4 mètres lorsque $\cos \left(\frac{\pi t}{6} \right) > \frac{1}{2}$, c'est-à-dire sur l'arc compris entre $-\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$. Sur l'intervalle étudié, cela correspond à $t < 2$ ou $t > 10$.

L'entrée est donc possible de 0 h à 2 h, puis de 10 h à 12 h, soit 4 heures au total.

Partie B : Exercice 2 — Angles d'un triangle

4 points

- 1) $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 5-1 \\ 1-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2-1 \\ 3-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

- 2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \times 1 + 3 \times 5 = 4 + 15 = 19$.

- 3) $AB = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$ et $AC = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}$.

4) On utilise $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$, d'où

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{19}{5\sqrt{26}} = \frac{19\sqrt{26}}{5 \times 26} = \boxed{\frac{19\sqrt{26}}{130}},$$

après avoir rendu le dénominateur rationnel en multipliant haut et bas par $\sqrt{26}$.

Ce cosinus est **strictement positif**, puisque 19, 5 et $\sqrt{26}$ le sont. Or le cosinus d'un angle de triangle est positif exactement lorsque cet angle mesure moins de 90° : l'angle $\widehat{BAC}$ est donc **aigu**, sans qu'il soit besoin d'en calculer la mesure.

5) Le triangle serait rectangle en A si $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ était nul. Or ce produit scalaire vaut $19 \neq 0$: le triangle **n'est pas rectangle en A** . On l'avait déjà établi à la question précédente : le produit scalaire étant positif, l'angle en A est aigu, donc certainement pas droit.

Partie B : Exercice 3 – Dans le plan complexe

5 points

1) Voir la figure ci-dessous.

2) $z_{\vec{AB}} = z_B - z_A = (5 + 2i) - (2 + i) = \boxed{3 + i}$, donc $AB = \sqrt{9 + 1} = \boxed{\sqrt{10}}$.

$z_{\vec{AC}} = z_C - z_A = (1 + 4i) - (2 + i) = \boxed{-1 + 3i}$, donc $AC = \sqrt{1 + 9} = \boxed{\sqrt{10}}$.

3) Les coordonnées sont donc $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, d'où

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 3 \times (-1) + 1 \times 3 = \boxed{0}.$$

Le produit scalaire est nul, donc le triangle est rectangle en A ; et comme $AB = AC = \sqrt{10}$, il est **rectangle isocèle en A** .

4) $z_I = \frac{z_B + z_C}{2} = \frac{(5 + 2i) + (1 + 4i)}{2} = \frac{6 + 6i}{2} = \boxed{3 + 3i}$.

5) $|z| = \sqrt{(-3)^2 + (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{9 + 27} = \sqrt{36} = \boxed{6}$. On factorise par le module :

$$z = 6 \left(-\frac{3}{6} + \frac{3\sqrt{3}}{6}i \right) = 6 \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right).$$

On cherche θ tel que $\cos \theta = -\frac{1}{2}$ et $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$: c'est $\theta = \frac{2\pi}{3}$. D'où

$$z = 6 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right).$$

