

Partie A : la loi de X

7 points

- 1) Les tickets gagnants sont au nombre de $5 + 25 + 120 = 150$. Les tickets perdants sont donc

$$1\,000 - 150 = \boxed{850}.$$

- 2) Le lot obtenu vaut 0 €, 5 €, 20 € ou 100 € : $X \in \{0; 5; 20; 100\}$.

- 3) Chaque ticket ayant la même probabilité d'être tiré, on divise l'effectif par 1 000.

x_i	0	5	20	100
$P(X = x_i)$	0,850	0,120	0,025	0,005

- 4) $0,850 + 0,120 + 0,025 + 0,005 = 1$. La loi est cohérente.

- 5) $P(X \geq 20) = P(X = 20) + P(X = 100) = 0,025 + 0,005 = \boxed{0,03}$.

Un acheteur a 3 % de chances d'obtenir un lot d'au moins 20 €, soit 3 chances sur 100.

- 6) L'espérance est la moyenne des valeurs pondérées par leurs probabilités :

$$E(X) = 0 \times 0,850 + 5 \times 0,120 + 20 \times 0,025 + 100 \times 0,005 = 0,6 + 0,5 + 0,5 = \boxed{1,6}.$$

En moyenne, un ticket rapporte 1,60 € de lot.

Partie B : le point de vue du joueur et celui du club

7 points

- 1) Le bénéfice est le lot obtenu diminué du prix payé : $B = X - 3$.

- 2) L'espérance est linéaire, donc retrancher 3 à toutes les valeurs retranche 3 à la moyenne :

$$E(B) = E(X) - 3 = 1,6 - 3 = \boxed{-1,4}.$$

- 3) Un élève qui achèterait un grand nombre de tickets perdrait en moyenne $\boxed{1,40 \text{ € par ticket}}$. Sur 20 tickets, par exemple, il perdrait environ 28 €. Cela ne dit rien d'un ticket en particulier : il peut très bien gagner 100 € avec le premier. L'espérance décrit un comportement moyen sur un grand nombre de répétitions, jamais un résultat isolé.

- 4) Le jeu n'est pas équitable, puisque $E(B) = -1,4 \neq 0$. Il est défavorable au joueur — ce qui est normal : c'est précisément ce qui permet à la tombola de rapporter de l'argent au club.

- 5) Le jeu serait équitable si $E(B) = 0$, c'est-à-dire si le prix du ticket était égal à $E(X)$. Il faudrait donc vendre le ticket $\boxed{1,60 \text{ €}}$. Le club ne gagnerait alors rien, en moyenne.

- 6) Si les 1 000 tickets sont vendus, la recette vaut $1\,000 \times 3 = 3\,000 \text{ €}$, et les lots versés

$$5 \times 100 + 25 \times 20 + 120 \times 5 = 500 + 500 + 600 = 1\,600 \text{ €}.$$

Le bénéfice du club est donc $3\,000 - 1\,600 = \boxed{1\,400 \text{ €}}$.

On le retrouve directement avec l'espérance : ce que le joueur perd en moyenne, le club le gagne. Chaque ticket rapporte au club 1,40 € en moyenne, soit $1\,000 \times 1,40 = 1\,400 \text{ €}$ pour l'ensemble des tickets.

Partie C : combien de tickets gagnants ?

6 points

- 1) Les tickets gagnants sont ceux qui rapportent quelque chose, soit $5 + 25 + 120 = 150$ tickets sur 1 000 :

$$p = \frac{150}{1\,000} = \boxed{0,15}.$$

- 2) La fréquence observée vaut $\frac{16}{80} = \boxed{0,20}$.

- 3) $p - 2s = 0,15 - 2 \times 0,040 = 0,15 - 0,08 = \boxed{0,07}$ et $p + 2s = 0,15 + 0,08 = \boxed{0,23}$.

- 4) La fréquence 0,20 appartient bien à l'intervalle $]0,07 ; 0,23[$. L'écart à p vaut $0,20 - 0,15 = 0,05$, soit $\frac{0,05}{0,040} = 1,25 s$: moins de deux écarts-types.

Cette observation est donc **fréquente**. Obtenir 16 gagnants sur 80 tickets n'a rien d'étonnant, même si la proportion réelle est bien de 15 %.

- 5) La fréquence observée vaut $\frac{0}{80} = 0$. L'écart à p vaut 0,15, soit

$$\frac{0,15}{0,040} = 3,75 s.$$

L'observation se situe à **3,75 écarts-types** de p , donc largement hors de l'intervalle $]0,07 ; 0,23[$: elle est **rare**. Elle n'est pas impossible pour autant — sur un grand nombre de classes, quelques-unes repartiront bredouilles — mais si le fait se répétait sur plusieurs groupes, il faudrait se demander si les tickets gagnants ont bien été répartis dans tout le lot.

- 6) L'élève confond une proportion et une garantie. Le fait que 15 % des tickets soient gagnants signifie qu'en *moyenne* on en trouve environ 12 sur 80 ; cela n'interdit nullement de n'en trouver aucun.

La question précédente en donne la preuve : le cas « aucun gagnant sur 80 » est justement celui qu'on vient d'étudier. Il est rare, mais il existe, et il se produira de temps en temps. Une proportion décrit ce qui se passe sur un très grand nombre de tirages, jamais ce qui arrivera à une classe donnée.