

Exercice 1 : Une station de recharge

6 points

- 1) Toutes les probabilités sont comprises entre 0 et 1, et leur somme vaut

$$0,10 + 0,25 + 0,30 + 0,25 + 0,10 = 1.$$

C'est donc bien une loi de probabilité.

- 2) $P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 0,30 + 0,25 + 0,10 = \boxed{0,65}$.

Dans 65 % des cas, au moins deux bornes sont libres.

- 3) $P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,10 + 0,25 = \boxed{0,35}$. (On pouvait aussi écrire $1 - 0,65$.)
C'est la probabilité qu'il reste au plus une borne libre : l'automobiliste qui arrive risque alors de ne pas pouvoir se brancher, ou d'être le dernier à le pouvoir.

- 4) L'espérance est la moyenne des valeurs pondérées par leurs probabilités :

$$E(X) = 0 \times 0,10 + 1 \times 0,25 + 2 \times 0,30 + 3 \times 0,25 + 4 \times 0,10 = 0,25 + 0,60 + 0,75 + 0,40 = \boxed{2}.$$

Sur un très grand nombre d'observations, il y a en moyenne 2 bornes libres dans cette station.

- 5) a. La station compte 4 bornes. Si X sont libres, alors $4 - X$ sont occupées, et chacune rapporte 3 € par heure. D'où

$$G = 3 \times (4 - X) = \boxed{12 - 3X}.$$

- b. L'espérance est linéaire : $E(12 - 3X) = 12 - 3E(X) = 12 - 3 \times 2 = \boxed{6}$.

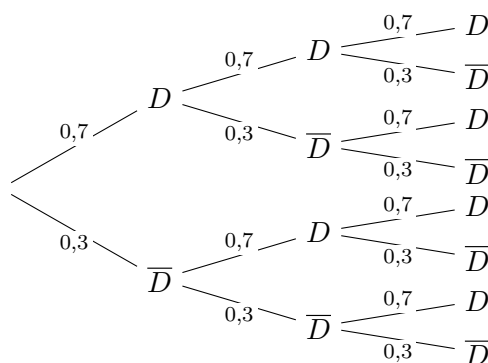
La station rapporte en moyenne 6 € par heure. (On peut vérifier en calculant la loi de G , qui prend les valeurs 12, 9, 6, 3, 0 avec les mêmes probabilités.)

Exercice 2 : Vélos en libre-service

6 points

- 1) Cette variable ne prend que deux valeurs, 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec : c'est par définition une loi de Bernoulli de paramètre $p = 0,7$. Son espérance vaut $1 \times 0,7 + 0 \times 0,3 = \boxed{0,7}$, c'est-à-dire p .

- 2) On note D « un vélo est disponible » (0,7) et $\bar{D}$ le contraire (0,3).



- 3) Un seul chemin donne $Y = 0$ (trois échecs) et un seul donne $Y = 3$:

$$P(Y = 0) = 0,3^3 = \boxed{0,027}, \quad P(Y = 3) = 0,7^3 = \boxed{0,343}.$$

- 4) Trois chemins donnent exactement deux disponibilités, selon la station manquante, et chacun a pour probabilité $0,7 \times 0,7 \times 0,3 = 0,147$. D'où

$$P(Y = 2) = 3 \times 0,147 = \boxed{0,441}.$$

- 5) La somme des probabilités d'une loi vaut 1, donc

$$P(Y = 1) = 1 - (0,027 + 0,441 + 0,343) = 1 - 0,811 = \boxed{0,189}.$$

y_i	0	1	2	3
$P(Y = y_i)$	0,027	0,189	0,441	0,343

6) $E(Y) = 0 \times 0,027 + 1 \times 0,189 + 2 \times 0,441 + 3 \times 0,343 = 0,189 + 0,882 + 1,029 = \boxed{2,1}$.

En moyenne, le lycéen trouve un vélo disponible dans 2,1 stations sur les 3. On retrouve $3 \times 0,7$: répéter trois fois une épreuve d'espérance 0,7 donne une espérance totale triple.

Exercice 3 : Combien de vélos hors service ?

5 points

1) $p - 2s = 0,30 - 2 \times 0,071 = 0,30 - 0,142 = \boxed{0,158}$ et $p + 2s = 0,30 + 0,142 = \boxed{0,442}$.

2) On additionne les barres situées en dehors de cet intervalle.

À gauche de 0,158 : $1 + 1 + 4 + 8 = 14$ échantillons (fréquences 0,075 à 0,150).

À droite de 0,442 : $8 + 3 + 1 + 1 = 13$ échantillons (fréquences 0,450 à 0,550).

Au total $14 + 13 = \boxed{27}$ échantillons, soit $\frac{27}{500} = 5,4\%$. Autrement dit, environ 95 % des échantillons simulés tombent dans l'intervalle : c'est le comportement attendu à deux écarts-types.

3) La fréquence observée vaut $\frac{9}{40} = \boxed{0,225}$. L'écart à p vaut $|0,225 - 0,30| = 0,075$, soit

$$\frac{0,075}{0,071} \approx 1,1.$$

L'observation se situe donc à environ $\boxed{1 s}$ de p .

4) Cette observation est **fréquente**. Elle tombe largement à l'intérieur de l'intervalle $]0,158 ; 0,442[$, dans la zone la plus haute de l'histogramme. Un écart d'un seul écart-type n'a rien d'inhabituel : sur les 500 échantillons simulés, près de quatre sur dix s'écartent de p d'au moins autant.

5) La fréquence vaut $\frac{23}{40} = 0,575$, soit un écart de 0,275 à p , c'est-à-dire

$$\frac{0,275}{0,071} \approx 3,9 s.$$

Cette observation est **très rare** : elle dépasse 3 s , et sur les 500 échantillons simulés, **aucun** n'atteint une fréquence aussi élevée — la plus forte observée est 0,55.

Il serait raisonnable de douter de l'annonce des 30 % pour ce secteur : soit l'échantillon a été prélevé dans une zone particulière (une station mal entretenue, par exemple), soit la proportion réelle de vélos hors service y est plus élevée qu'annoncé. Un second prélèvement, indépendant, permettrait de trancher.

Exercice 4 : Vrai ou faux ?

3 points

1) **Faux**. L'espérance est une moyenne, et une moyenne n'a aucune raison d'être une valeur atteinte. Contre-exemple pris à l'exercice 2 : $E(Y) = 2,1$, alors que Y ne prend que les valeurs 0, 1, 2 et 3.

2) **Vrai**. L'espérance est linéaire : multiplier toutes les valeurs par 2 multiplie la moyenne par 2, et ajouter 5 à toutes les valeurs ajoute 5 à la moyenne. C'est exactement ce qui a permis, à l'exercice 1, de calculer $E(12 - 3X) = 12 - 3E(X)$ sans dresser la loi de G .

3) **Faux**. C'est l'inverse. Les simulations montrent que l'écart-type s de la série des fréquences observées est de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{n}}$: quand la taille n des échantillons augmente, s diminue, donc

les fréquences observées se **resserrent** autour de p . C'est le principe même de l'échantillonnage : un grand échantillon donne une estimation plus fiable qu'un petit. On note au passage que la dispersion décroît lentement — pour la diviser par 2, il faut multiplier la taille de l'échantillon par 4.