

Exercice 1 : Un filtre anti-spam

6 points

- 1) Les spams sont 20 % des 5 000 messages, soit $0,20 \times 5\,000 = 1\,000$; les messages légitimes sont donc $5\,000 - 1\,000 = 4\,000$. On complète chaque ligne par différence.

	Bloqué (B)	Laissé passer ($\bar{B}$)	Total
Spam (S)	950	50	1 000
Légitime ($\bar{S}$)	120	3 880	4 000
Total	1 070	3 930	5 000

- 2) Chaque message ayant la même probabilité d'être choisi, une probabilité est un effectif divisé par 5 000 :

$$P(S) = \frac{1\,000}{5\,000} = \boxed{0,2}, \quad P(B) = \frac{1\,070}{5\,000} = \boxed{0,214}, \quad P(S \cap B) = \frac{950}{5\,000} = \boxed{0,19}.$$

- 3) On se restreint aux spams, donc on divise par leur effectif :

$$P_S(B) = \frac{950}{1\,000} = \boxed{0,95}.$$

Autrement dit : *parmi les spams reçus, 95 % sont effectivement bloqués par le filtre. C'est la part des indésirables que le filtre sait reconnaître.*

- 4) On se restreint cette fois aux messages légitimes :

$$P_{\bar{S}}(\bar{B}) = \frac{3\,880}{4\,000} = \boxed{0,97}.$$

Autrement dit : *parmi les messages légitimes, 97 % arrivent bien dans la boîte de réception. Les 3 % restants sont les messages bloqués à tort.*

- 5) On se restreint aux messages bloqués, au nombre de 1 070 :

$$P_B(S) = \frac{950}{1\,070} \approx \boxed{0,888}.$$

Environ 89 % des messages bloqués sont bien des spams : autrement dit, un peu plus d'un message bloqué sur dix est un message légitime.

- 6) On se restreint aux messages laissés passer, au nombre de 3 930 :

$$P_{\bar{B}}(S) = \frac{50}{3\,930} \approx \boxed{0,013}.$$

C'est la probabilité qu'un message arrivé dans la boîte de réception soit en réalité un spam : environ 1,3 %, ce qui est faible.

- 7) Les deux erreurs se lisent directement dans le tableau : 120 messages légitimes ont été bloqués, et 50 spams sont passés.

C'est le blocage d'un message légitime qui gêne le plus. Un spam qui passe est une gêne mineure : l'utilisateur le voit et le supprime. Un message légitime bloqué, lui, part dans un dossier que l'on ne consulte pas toujours : il peut ne jamais être lu, sans que personne s'en aperçoive. Et cette erreur n'est pas rare : parmi les 1 070 messages bloqués, 120 sont légitimes, soit plus d'un sur dix.

Régler un filtre, c'est toujours arbitrer entre ces deux erreurs : les rendre plus sévère diminue l'une et augmente l'autre.

Exercice 2 : Un festival de musique

5 points

- 1) On multiplie chaque probabilité par 500 : 300 festivaliers venus en train, 275 dormant au camping, et $0,38 \times 500 = 190$ qui cumulent les deux. Le reste s'obtient par différences.

	Camping (C)	Pas au camping ($\bar{C}$)	Total
Train (T)	190	110	300
Autre transport ($\bar{T}$)	85	115	200
Total	275	225	500

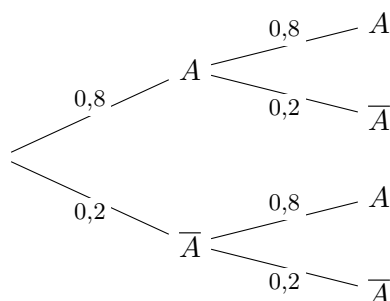
- 2) $P_T(C) = \frac{190}{300} \approx \boxed{0,633}$ et $P_C(T) = \frac{190}{275} \approx \boxed{0,691}$.
- 3) a. Les deux conditions sont réunies simultanément, sans restriction de l'ensemble : c'est $\boxed{P(T \cap C) = 0,38}$.
- b. L'événement décrit est le contraire de « dormir au camping », sans restriction de l'ensemble : c'est $\boxed{P(\bar{C}) = 1 - 0,55 = 0,45}$, ce que confirme le tableau avec $\frac{225}{500}$.
- c. « Parmi les festivaliers qui ne sont pas venus en train » restreint l'ensemble à $\bar{T}$: c'est $\boxed{P_{\bar{T}}(C) = \frac{85}{200} = 0,425}$.
- 4) $P_T(C) \approx 0,633$ alors que $P(C) = 0,55$. Savoir qu'un festivalier est venu en train fait donc passer la probabilité qu'il campe de 55 % à environ 63 % : elle augmente. On peut aussi le voir sur l'autre groupe, $P_{\bar{T}}(C) = 0,425$, nettement plus bas.
Venir en train et camper semblent donc liés dans ce festival, ce qui s'explique aisément : sans voiture, on repart moins facilement le soir. Attention cependant, le tableau met en évidence un lien, il ne prouve pas que l'un cause l'autre.

Exercice 3 : Le tir à l'arc

6 points

On note A l'événement « la flèche atteint la cible », de probabilité 0,8, et $\bar{A}$ l'événement contraire, de probabilité $1 - 0,8 = 0,2$.

- 1) a.



- b. Les deux tirs étant indépendants, on multiplie les probabilités le long du chemin :

$$P(\text{deux fois}) = 0,8 \times 0,8 = \boxed{0,64}.$$

- c. Deux chemins conviennent : atteindre puis manquer, ou manquer puis atteindre. On additionne :

$$P(\text{exactement une}) = 0,8 \times 0,2 + 0,2 \times 0,8 = 0,16 + 0,16 = \boxed{0,32}.$$

- 2) a. Chaque tir ouvre deux branches, donc l'arbre comporte $2 \times 2 \times 2 = 8$ chemins.
b. Un seul chemin correspond à trois échecs :

$$P(\text{aucune}) = 0,2 \times 0,2 \times 0,2 = 0,2^3 = 0,008.$$

- c. « Au moins une » est l'événement contraire de « aucune » :

$$P(\text{au moins une}) = 1 - 0,008 = 0,992.$$

- d. Trois chemins conviennent, selon le rang du tir réussi, et chacun a la même probabilité $0,8 \times 0,2 \times 0,2 = 0,032$:

$$P(\text{exactement une}) = 3 \times 0,032 = 0,096.$$

- 3) Les deux tirs sont indépendants, mais les probabilités diffèrent. Deux cas conviennent : la première réussit et la seconde échoue, ou l'inverse.

$$P(\text{exactement une}) = 0,8 \times 0,5 + 0,2 \times 0,5 = 0,4 + 0,1 = 0,5.$$

On peut le retrouver plus vite : quoi que fasse la première archère, la seconde réussit une fois sur deux ; la probabilité d'avoir exactement une réussite vaut alors exactement 0,5.

Exercice 4 : Vrai ou faux ?

3 points

- 1) **Faux.** Les deux probabilités ne portent pas sur le même ensemble de référence : $P_A(B)$ se calcule parmi les cas où A est réalisé, $P_B(A)$ parmi ceux où B l'est. Contre-exemple pris à l'exercice 1 : $P_S(B) = 0,95$ alors que $P_B(S) \approx 0,888$ (questions 3 et 5). Les deux nombres sont différents, et ils peuvent l'être bien davantage.
- 2) **Vrai.** À partir d'un nœud donné, les branches représentent toutes les issues possibles de l'épreuve suivante, et ces issues s'excluent mutuellement. Leurs probabilités se répartissent donc la totalité : ici $0,8 + 0,2 = 1$ à chaque nœud. C'est une vérification utile pour contrôler un arbre.
- 3) **Faux.** La probabilité de manquer les cinq fois vaut $0,2^5 = 0,00032$, donc celle d'atteindre la cible au moins une fois vaut $1 - 0,00032 = 0,99968$. C'est très proche de 1, mais ce n'est pas 1 : l'événement « manquer les cinq flèches » reste possible, environ trois fois sur dix mille. Une probabilité proche de 1 ne signifie jamais la certitude.