

Calculatrice autorisée

Exercice 1 : Un filtre anti-spam

6 points

Une messagerie analyse 5 000 messages reçus en une journée. Un message est soit un *spam*, soit un message légitime; le filtre décide de le bloquer ou de le laisser passer. On sait que :

- 20 % des messages reçus sont des spams;
- parmi les spams, le filtre en bloque 950;
- le filtre bloque aussi, à tort, 120 messages légitimes.

On choisit un message au hasard parmi les 5 000 (tous ont la même probabilité d'être choisis). On note S : « le message est un spam » et B : « le message est bloqué par le filtre ».

1) Recopier et compléter le tableau croisé d'effectifs.

	Bloqué (B)	Laissé passer ($\bar{B}$)	Total
Spam (S)	950		
Légitime ($\bar{S}$)	120		
Total			5 000

- 2) Calculer $P(S)$, $P(B)$ et $P(S \cap B)$.
- 3) Calculer $P_S(B)$ et interpréter cette probabilité par une phrase.
- 4) Calculer $P_{\bar{S}}(\bar{B})$. Interpréter.
- 5) Un message a été bloqué. Quelle est la probabilité que ce soit réellement un spam ? Arrondir au millième.
- 6) Un message est passé à travers le filtre. Quelle est la probabilité que ce soit un spam ? Arrondir au millième.
- 7) Le filtre commet deux types d'erreurs : bloquer un message légitime, ou laisser passer un spam. Laquelle des deux gêne le plus l'utilisateur ? Justifier en s'appuyant sur les effectifs du tableau.

Exercice 2 : Un festival de musique

5 points

Un festival accueille 500 festivaliers. On en choisit un au hasard et on note T : « il est venu en train » et C : « il dort sur le camping du festival ». On sait que

$$P(T) = 0,6, \quad P(C) = 0,55, \quad P(T \cap C) = 0,38.$$

- 1) Dresser le tableau croisé d'effectifs de cette enquête (lignes $T / \bar{T}$, colonnes $C / \bar{C}$).
- 2) Calculer $P_T(C)$ et $P_C(T)$, arrondies au millième.
- 3) Traduire chacune des phrases suivantes par une probabilité, avec les notations $P(\dots)$ ou $P_{\dots}(\dots)$, et donner sa valeur :
 - a. « 38 % des festivaliers sont venus en train et dorment au camping »;
 - b. « 45 % des festivaliers ne dorment pas au camping »;
 - c. « parmi les festivaliers qui ne sont pas venus en train, 42,5 % dorment au camping ».
- 4) Comparer $P_T(C)$ et $P(C)$. Venir en train semble-t-il lié au fait de camper ?

Exercice 3 : Le tir à l'arc**6 points**

Une archère atteint la cible avec la probabilité 0,8. On admet que ses tirs sont **indépendants** les uns des autres.

- 1) Elle tire deux flèches.
 - a. Représenter la situation par un arbre de probabilités.
 - b. Calculer la probabilité qu'elle atteigne la cible les deux fois.
 - c. Calculer la probabilité qu'elle l'atteigne exactement une fois.
- 2) Elle tire maintenant trois flèches.
 - a. Combien de chemins comporte l'arbre correspondant ?
 - b. Calculer la probabilité qu'elle manque la cible les trois fois.
 - c. En déduire la probabilité qu'elle atteigne la cible au moins une fois.
 - d. Calculer la probabilité qu'elle atteigne la cible exactement une fois.
- 3) Une seconde archère, moins expérimentée, atteint la cible avec la probabilité 0,5. Chacune tire une flèche, de façon indépendante. Calculer la probabilité qu'exactlyement une des deux flèches atteigne la cible.

Exercice 4 : Vrai ou faux ?**3 points**

Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

- 1) **Affirmation 1** : si $P_A(B) = 0,9$, alors $P_B(A) = 0,9$.
- 2) **Affirmation 2** : sur un arbre de probabilités, la somme des probabilités portées par les branches issues d'un même nœud vaut toujours 1.
- 3) **Affirmation 3** : l'archère de l'exercice 3 atteignant la cible 8 fois sur 10, en tirant 5 flèches elle est certaine d'en réussir au moins une.