

Partie A : calculs sur z_1

7 points

1) $z_1^2 = (1+i)^2 = 1+2i+i^2 = 1+2i-1 = \boxed{2i}$. On remarque que le carré de $1+i$ est un **imaginaire pur** : sa partie réelle est nulle.

2) On utilise le résultat précédent : $z_1^4 = (z_1^2)^2 = (2i)^2 = 4i^2 = \boxed{-4}$. Le passage par le carré évite un développement de degré 4.

3) $\bar{z}_1 = \boxed{1-i}$, et

$$z_1 \times \bar{z}_1 = (1+i)(1-i) = 1-i^2 = 1+1 = \boxed{2}.$$

4) $|z_1| = \sqrt{1^2+1^2} = \boxed{\sqrt{2}}$. Or on sait que $z \times \bar{z} = |z|^2$: ici $|z_1|^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$, ce qui correspond bien au résultat de la question 3.

5) On multiplie par le conjugué du dénominateur :

$$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{2} = \boxed{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i}.$$

6) On factorise par le module : $z_1 = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)$.

On cherche θ tel que $\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$: c'est $\theta = \frac{\pi}{4}$. D'où

$$z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

Partie B : le quadrilatère $ABCD$

7 points

1) Voir la figure ci-dessous.

2) $\vec{z_{AB}} = z_B - z_A = (4+2i) - (1+i) = \boxed{3+i}$ et $\vec{z_{DC}} = z_C - z_D = (3+5i) - 4i = \boxed{3+i}$.

Les deux vecteurs ont la même affixe, donc $\vec{AB} = \vec{DC}$: le quadrilatère $ABCD$ est un **parallélogramme**.

3) $AB = |3+i| = \sqrt{9+1} = \boxed{\sqrt{10}}$.

$$\vec{z_{BC}} = z_C - z_B = (3+5i) - (4+2i) = -1+3i, \text{ donc } BC = \sqrt{1+9} = \boxed{\sqrt{10}}.$$

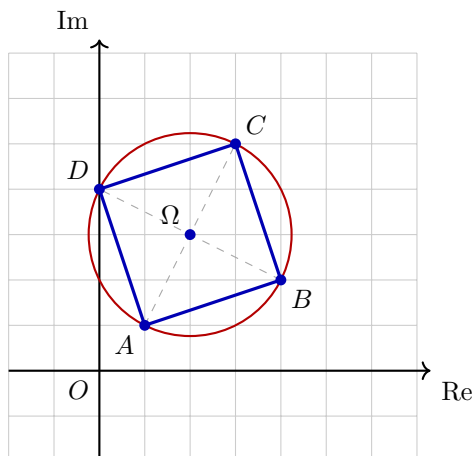
4) $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 3 \times (-1) + 1 \times 3 = -3+3 = \boxed{0}$: les deux côtés consécutifs sont perpendiculaires. Le parallélogramme possède donc un angle droit, c'est un rectangle ; et comme deux côtés consécutifs ont la même longueur $\sqrt{10}$, c'est un **carré** de côté $\sqrt{10}$.

5) Le milieu de $[AC]$ a pour affixe la demi-somme des affixes :

$$z_\Omega = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{(1+i) + (3+5i)}{2} = \frac{4+6i}{2} = \boxed{2+3i}.$$

6) $z_A - z_\Omega = (1+i) - (2+3i) = -1-2i$, donc $\Omega A = \sqrt{1+4} = \boxed{\sqrt{5}}$.

Dans un carré, les diagonales se coupent en leur milieu et ont la même longueur : le point Ω est donc à égale distance des quatre sommets. Les quatre points appartiennent ainsi au cercle de centre $\Omega(2+3i)$ et de rayon $\sqrt{5}$, le cercle circonscrit au carré.



Partie C : formes trigonométriques

6 points

- 1) $|z_7| = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{12 + 4} = \sqrt{16} = 4$. On factorise par le module :

$$z_7 = 4 \left(-\frac{2\sqrt{3}}{4} + \frac{2}{4}i \right) = 4 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right).$$

On cherche θ tel que $\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{1}{2}$: c'est $\theta = \frac{5\pi}{6}$. D'où

$$z_7 = 4 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right).$$

- 2) Le module d'un produit est le produit des modules :

$$|z_1 \times z_7| = |z_1| \times |z_7| = \sqrt{2} \times 4 = 4\sqrt{2}.$$

- 3) Un argument de $\frac{\pi}{2}$ place le point sur l'axe des imaginaires, au-dessus de l'origine, et le module 5 donne la distance à O . Par le calcul :

$$z_8 = 5 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 5(0 + i) = 5i.$$

- 4) On remplace par les valeurs remarquables $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$:

$$z_9 = 6 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 3\sqrt{3} + 3i.$$

- 5) L'affirmation est **fausse**. Le module mesure seulement la distance à l'origine : deux nombres de même module sont à la même distance de O , donc sur un même cercle, mais rien n'impose qu'ils soient au même endroit de ce cercle – il faut pour cela que leurs arguments coïncident aussi.

Exemple pris dans ce sujet : les quatre sommets A , B , C et D ne conviennent pas, car leurs modules diffèrent. En revanche, $z_1 = 1 + i$ et $\bar{z}_1 = 1 - i$ ont tous deux pour module $\sqrt{2}$ (question A.4), et ils sont pourtant différents : leurs arguments sont $\frac{\pi}{4}$ et $-\frac{\pi}{4}$.