

Calculatrice autorisée

Dans tout le sujet, le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On s'intéresse au nombre complexe

$$z_1 = 1 + i$$

et au quadrilatère $ABCD$ dont les sommets ont pour affixes

$$z_A = 1 + i, \quad z_B = 4 + 2i, \quad z_C = 3 + 5i, \quad z_D = 4i.$$

On remarquera que $z_A = z_1$: le point A est le point d'affixe z_1 .

Partie A : calculs sur z_1

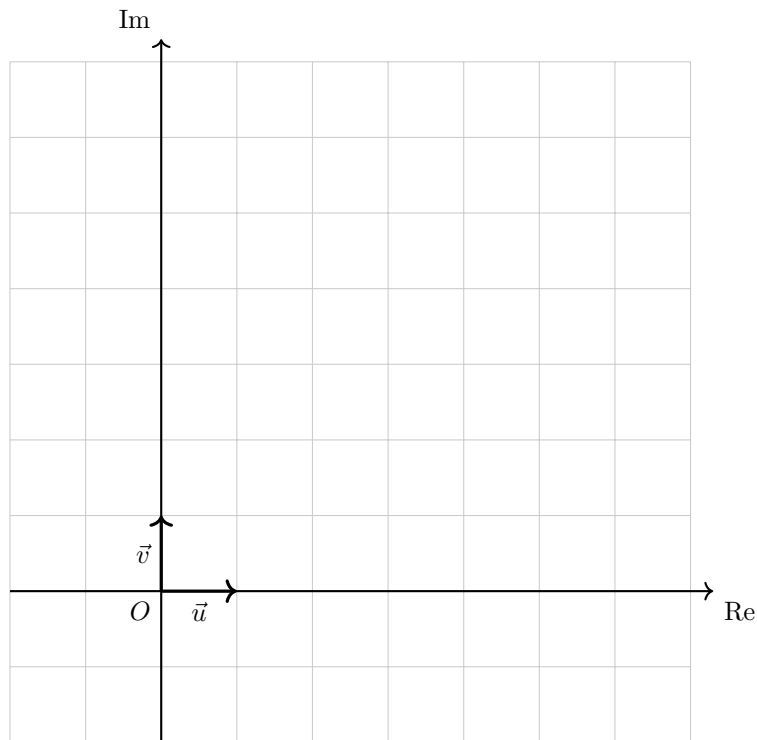
7 points

- 1) Calculer z_1^2 sous forme algébrique. Que remarque-t-on ?
- 2) En déduire z_1^4 sans développer $(1 + i)^4$.
- 3) Donner le conjugué $\overline{z_1}$, puis calculer $z_1 \times \overline{z_1}$.
- 4) Calculer $|z_1|$. Vérifier la cohérence avec le résultat de la question 3.
- 5) Écrire $\frac{1}{z_1}$ sous forme algébrique.
- 6) Déterminer un argument de z_1 , puis écrire z_1 sous forme trigonométrique.

Partie B : le quadrilatère $ABCD$

7 points

- 1) Placer les points A, B, C et D dans le repère ci-dessous.
- 2) Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$. Que peut-on en déduire pour le quadrilatère $ABCD$?
- 3) Calculer les longueurs AB et BC (valeurs exactes).
- 4) Les coordonnées d'un vecteur dans le repère sont la partie réelle et la partie imaginaire de son affixe. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$, et en déduire la nature exacte du quadrilatère $ABCD$.
- 5) Déterminer l'affixe du point Ω , centre du quadrilatère, milieu de $[AC]$.
- 6) Calculer la distance ΩA . En déduire que les quatre sommets appartiennent à un même cercle, dont on précisera le centre et le rayon, puis le tracer sur la figure.



Partie C : formes trigonométriques

6 points

- 1) Déterminer le module et un argument de $z_7 = -2\sqrt{3} + 2i$, puis écrire z_7 sous forme trigonométrique.
- 2) Déterminer le module de $z_1 \times z_7$ sans calculer ce produit.
- 3) Le nombre z_8 a pour module 5 et pour argument $\frac{\pi}{2}$. Donner sa forme algébrique.
- 4) Le nombre z_9 s'écrit $z_9 = 6 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$. Donner sa forme algébrique.
- 5) Un technicien affirme : « Deux nombres complexes de même module sont égaux. » Que penser de cette affirmation ? Justifier à l'aide d'un exemple pris dans ce sujet.