

Exercice 1 : Calculs sous forme algébrique

5 points

- 1) On additionne séparément les parties réelles et les parties imaginaires :

$$z_1 + z_2 = (2 + 1) + (3 - 1)i = \boxed{3 + 2i}.$$

Pour le produit, on développe comme avec des expressions littérales, puis on remplace i^2 par -1 :

$$z_1 \times z_2 = (2 + 3i)(1 - i) = 2 - 2i + 3i - 3i^2 = 2 + i + 3 = \boxed{5 + i}.$$

2) $z_1^2 = (2 + 3i)^2 = 4 + 12i + 9i^2 = 4 + 12i - 9 = \boxed{-5 + 12i}.$

- 3) On multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur, ce qui rend le dénominateur réel :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 + 3i}{1 - i} = \frac{(2 + 3i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{2 + 2i + 3i + 3i^2}{1 + 1} = \frac{-1 + 5i}{2} = \boxed{-\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i}.$$

4) $|z_1| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \boxed{\sqrt{13}}$ et $|z_2| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \boxed{\sqrt{2}}.$

Le module d'un produit est le produit des modules, donc

$$|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2| = \sqrt{13} \times \sqrt{2} = \boxed{\sqrt{26}}.$$

- 5) On a trouvé $z_1 \times z_2 = 5 + i$, dont le module vaut $\sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$. Les deux méthodes donnent bien le même résultat.

Exercice 2 : Dans le plan complexe

5 points

- 1) Voir la figure ci-dessous : l'affixe $a + bi$ correspond au point de coordonnées $(a; b)$.
2) L'affixe d'un vecteur est la différence des affixes, extrémité moins origine :

$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = (5 + 4i) - (1 + 2i) = \boxed{4 + 2i}.$$

La distance AB est le module de cette affixe : $AB = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = \boxed{2\sqrt{5}}.$

3) $z_C - z_A = (3 + 6i) - (1 + 2i) = 2 + 4i$, donc $AC = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$

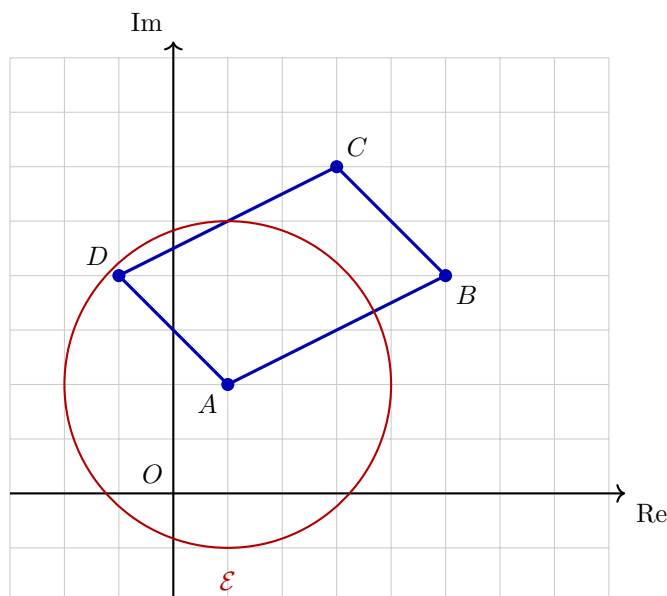
$z_C - z_B = (3 + 6i) - (5 + 4i) = -2 + 2i$, donc $BC = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$

Comme $AB = AC = 2\sqrt{5}$ et $BC \neq AB$, le triangle ABC est **isocèle en A**.

- 4) Dans le parallélogramme $ABCD$, on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, d'où $z_B - z_A = z_C - z_D$ et donc $z_D = z_C - z_B + z_A$:

$$z_D = (3 + 6i) - (5 + 4i) + (1 + 2i) = \boxed{-1 + 4i}.$$

- 5) $|z - 1 - 2i| = |z - z_A|$ est la distance AM . L'égalité $AM = 3$ signifie que M est à distance 3 du point A : l'ensemble $\mathcal{E}$ est donc **le cercle de centre A et de rayon 3**.



Exercice 3 : Forme trigonométrique

7 points

- 1) $|z_3| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \boxed{2}$. On factorise ensuite par le module :

$$z_3 = 2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right).$$

On cherche θ tel que $\cos \theta = -\frac{1}{2}$ et $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$: c'est $\theta = \frac{2\pi}{3}$. D'où

$$z_3 = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right).$$

- 2) $|z_4| = |-4i| = \boxed{4}$. Le point d'affixe $-4i$ est sur l'axe des imaginaires, en dessous de l'origine : un argument est $\boxed{-\frac{\pi}{2}}$. D'où $z_4 = 4 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right)$.

- 3) $|z_5| = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = \boxed{3\sqrt{2}}$. On factorise :

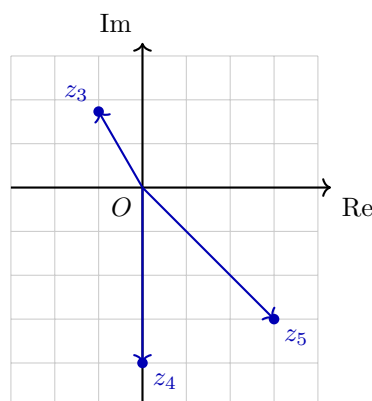
$$z_5 = 3\sqrt{2} \left(\frac{3}{3\sqrt{2}} - \frac{3}{3\sqrt{2}} i \right) = 3\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i \right).$$

On cherche θ tel que $\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$: c'est $\theta = -\frac{\pi}{4}$. D'où

$$z_5 = 3\sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right).$$

- 4) $z_3 = -1 + i\sqrt{3}$ est dans le deuxième quadrant (partie réelle négative, partie imaginaire positive) : un argument entre $\frac{\pi}{2}$ et π , cohérent avec $\frac{2\pi}{3}$.
 $z_4 = -4i$ est sur l'axe des imaginaires vers le bas : argument $-\frac{\pi}{2}$, cohérent.

$z_5 = 3 - 3i$ est dans le quatrième quadrant (partie réelle positive, partie imaginaire négative), sur la bissectrice puisque les deux valeurs sont opposées : argument $-\frac{\pi}{4}$, cohérent.



5) On remplace par les valeurs remarquables $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ et $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$z_6 = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) = \boxed{1 + i\sqrt{3}}.$$

6) Le module d'un produit est le produit des modules :

$$|z_3 \times z_5| = |z_3| \times |z_5| = 2 \times 3\sqrt{2} = \boxed{6\sqrt{2}}.$$

Exercice 4 : Vrai ou faux ?

3 points

1) **Vrai.** En posant $z = a + bi$ avec a et b réels, on a $\bar{z} = a - bi$ et

$$z \times \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

C'est une somme de deux carrés, donc un réel positif (nul uniquement si $z = 0$).

2) **Faux.** $|z| = 1$ signifie que le point d'affixe z est à distance 1 de l'origine : il décrit tout le cercle de centre O et de rayon 1, et pas seulement ses deux points sur l'axe réel. Contre-exemple : $z = i$ vérifie $|i| = 1$ et n'est ni 1 ni -1 .

3) **Faux.** On développe : $(2 - i)^2 = 4 - 4i + i^2 = 4 - 4i - 1 = 3 - 4i$. La partie réelle vaut donc 3, et non 4. L'erreur consiste à oublier que $i^2 = -1$ contribue à la partie réelle.