

### Exercice 1 : Automatismes (QCM)

4 points

- 1) **Réponse a.** En repère orthonormé, on multiplie les abscisses entre elles, les ordonnées entre elles, et on additionne :  $2 \times 4 + (-3) \times 1 = 8 - 3 = \boxed{5}$ .
- 2) **Réponse c.**  $\|\vec{w}\| = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = \boxed{10}$ . (Le 100 est le carré de la norme, pas la norme; et 14 est la somme des coordonnées, pas la norme.)
- 3) **Réponse b.** Un produit scalaire nul entre deux vecteurs non nuls caractérise l'orthogonalité : c'est le critère à retenir pour démontrer qu'un angle est droit.
- 4) **Réponse b.** On applique  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \theta = 2 \times 3 \times \cos 60^\circ = 6 \times \frac{1}{2} = \boxed{3}$ .
- 5) **Réponse d.** Le vecteur fait un angle nul avec lui-même, donc  $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos 0 = \boxed{\|\vec{u}\|^2}$ .

### Exercice 2 : Calculs en repère orthonormé

5 points

- 1)  $\vec{AB} \begin{pmatrix} 5-1 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$  et  $\vec{AC} \begin{pmatrix} 0-1 \\ 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ .
- 2)  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 4 \times (-1) + 2 \times 3 = -4 + 6 = \boxed{2}$ .
- 3)  $AB = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = \boxed{2\sqrt{5}}$  et  $AC = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \boxed{\sqrt{10}}$ .
- 4) Le triangle  $ABC$  est rectangle en  $A$  si et seulement si  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$ . Or ce produit scalaire vaut 2, qui n'est pas nul : le triangle n'est pas rectangle en  $A$ . (Il est de plus positif, donc l'angle en  $A$  est aigu.)
- 5)  $\vec{AD} \begin{pmatrix} 3-1 \\ -3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ , donc

$$\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 4 \times 2 + 2 \times (-4) = 8 - 8 = 0.$$

Les vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{AD}$  sont non nuls et de produit scalaire nul : ils sont orthogonaux, donc les droites  $(AB)$  et  $(AD)$  sont perpendiculaires.

### Exercice 3 : Un triangle aux mesures exactes

6 points

- 1) Par définition,  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC} = 5 \times 8 \times \cos 60^\circ = 40 \times \frac{1}{2} = \boxed{20}$ .
- 2) Le théorème d'Al-Kashi appliqué au côté  $[BC]$ , opposé au sommet  $A$ , donne

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos \widehat{BAC} = 25 + 64 - 2 \times 20 = 89 - 40 = 49.$$

Une longueur étant positive,  $BC = \sqrt{49} = \boxed{7 \text{ cm}}$ .

- 3) On applique cette fois le théorème au côté  $[AC]$ , opposé au sommet  $B$  :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \times AB \times BC \times \cos \widehat{ABC},$$

$$\text{soit } 64 = 25 + 49 - 2 \times 5 \times 7 \times \cos \widehat{ABC} = 74 - 70 \cos \widehat{ABC}.$$

$$\text{D'où } 70 \cos \widehat{ABC} = 74 - 64 = 10, \text{ et donc } \cos \widehat{ABC} = \frac{10}{70} = \boxed{\frac{1}{7}}.$$

- 4) Le cosinus trouvé,  $\frac{1}{7}$ , est **strictement positif**. Or le cosinus d'un angle de triangle est positif exactement lorsque cet angle est inférieur à  $90^\circ$ . L'angle  $\widehat{ABC}$  est donc **aigu**, sans qu'il soit besoin d'en calculer la mesure.
- 5) L'égalité du parallélogramme donne  $AD^2 + BC^2 = 2(AB^2 + AC^2)$ , soit

$$AD^2 + 49 = 2(25 + 64) = 2 \times 89 = 178.$$

D'où  $AD^2 = 178 - 49 = 129$ , et donc  $AD = \sqrt{129} \text{ cm}$ . (129 n'a pas de facteur carré, la racine ne se simplifie pas.)

## Exercice 4 : Dans un rectangle

5 points

- 1) Dans un rectangle, deux côtés consécutifs sont perpendiculaires :  $\vec{AB}$  et  $\vec{AD}$  sont orthogonaux, donc leur produit scalaire est nul,  $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 0$ . Aucun calcul de coordonnées n'est nécessaire : c'est la définition même de l'orthogonalité.
- 2)  $\vec{AC} \begin{pmatrix} 4-0 \\ 3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$  et  $\vec{BD} \begin{pmatrix} 0-4 \\ 3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ .
- 3) Avec  $\vec{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$  :  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 4 \times 4 + 0 \times 3 = 16$ .

**Par projection** : le projeté orthogonal du point  $C$  sur la droite  $(AB)$  est le point  $B$ , car  $(BC)$  est perpendiculaire à  $(AB)$ . Le projeté de  $\vec{AC}$  sur  $(AB)$  est donc  $\vec{AB}$  lui-même, et

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AB} = AB^2 = 4^2 = 16.$$

On retrouve bien le même résultat.

- 4)  $AC = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$  (c'est le triangle rectangle 3-4-5). Puis

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{AB \times AC} = \frac{16}{4 \times 5} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5} = 0,8.$$

- 5)  $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = 4 \times (-4) + 3 \times 3 = -16 + 9 = -7$ .

Ce produit scalaire n'est pas nul, donc les diagonales **ne sont pas perpendiculaires**. C'est normal : dans un rectangle les diagonales ont même longueur, mais elles ne deviennent perpendiculaires que si le rectangle est un carré, ce qui n'est pas le cas ici puisque  $AB \neq AD$ .