

Exercice 1 : Produit scalaire et triangle rectangle

5 points

- 1) En repère orthonormé, le produit scalaire est la somme des produits des coordonnées :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 \times 1 + (-3) \times 2 = 4 - 6 = \boxed{-2}.$$

Les normes valent $\|\vec{u}\| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = \boxed{5}$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \boxed{\sqrt{5}}$.

- 2) On utilise $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \theta$, d'où

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{-2}{5\sqrt{5}} \approx -0,1789.$$

À la calculatrice, $\theta \approx \boxed{100,3^\circ}$. Le cosinus est négatif, donc l'angle est **obtus** (il dépasse 90°), ce que confirme la valeur trouvée.

- 3) $\vec{u} \cdot \vec{w} = 4 \times 3 + (-3) \times 4 = 12 - 12 = \boxed{0}$. Un produit scalaire nul entre deux vecteurs non nuls signifie que ces vecteurs sont **orthogonaux**.

4) a. $\vec{AB} \begin{pmatrix} 3 - (-1) \\ -1 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{AC} \begin{pmatrix} 2 - (-1) \\ 6 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

b. On reconnaît les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ de la question 3 : $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 4 \times 3 + (-3) \times 4 = 0$. Les côtés $[AB]$ et $[AC]$ sont donc perpendiculaires : le triangle ABC est **rectangle en A**.

c. $AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{16 + 9} = 5$ et $AC = \|\vec{AC}\| = \sqrt{9 + 16} = 5$. Le triangle a un angle droit en A et deux côtés de même longueur issus de A : il est **rectangle isocèle en A**. Ses deux angles à la base sont donc égaux, et comme leur somme vaut $180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$, chacun mesure $\widehat{ABC} = \boxed{45^\circ}$.

Exercice 2 : Al-Kashi à l'envers

5 points

- 1) Le théorème d'Al-Kashi appliqué au côté $[EF]$, opposé au sommet D , s'écrit

$$EF^2 = DE^2 + DF^2 - 2 \times DE \times DF \times \cos \widehat{EDF}.$$

En remplaçant : $81 = 49 + 25 - 2 \times 7 \times 5 \times \cos \widehat{EDF}$, soit $81 = 74 - 70 \cos \widehat{EDF}$.

D'où $70 \cos \widehat{EDF} = 74 - 81 = -7$, et donc $\cos \widehat{EDF} = \frac{-7}{70} = \boxed{-\frac{1}{10}}$.

- 2) À la calculatrice, $\widehat{EDF} = \arccos(-0,1) \approx \boxed{95,7^\circ}$.

- 3) Par définition, $\vec{DE} \cdot \vec{DF} = DE \times DF \times \cos \widehat{EDF} = 7 \times 5 \times \left(-\frac{1}{10}\right) = \boxed{-3,5}$.

Le produit scalaire est **négatif** : cela signifie que l'angle entre les deux vecteurs est obtus, ce qui est cohérent avec les $95,7^\circ$ trouvés à la question précédente.

- 4) Dans le parallélogramme construit sur $\vec{DE}$ et $\vec{DF}$, les deux diagonales ont pour longueurs EF et $2DM$ (la seconde diagonale part de D et passe par le milieu M de $[EF]$). L'égalité du parallélogramme donne

$$(2DM)^2 + EF^2 = 2(DE^2 + DF^2),$$

soit $4DM^2 + 81 = 2(49 + 25) = 148$. D'où $4DM^2 = 148 - 81 = 67$, et donc $DM^2 = \boxed{\frac{67}{4}}$.

Enfin $DM = \frac{\sqrt{67}}{2} \approx \boxed{4,09 \text{ cm}}$.

Exercice 3 : Contrôle d'une pièce usinée

7 points

- 1) $\vec{AB} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{BC} \begin{pmatrix} 4-6 \\ 8-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{DC} \begin{pmatrix} 4-(-2) \\ 8-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$.
- 2) Les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{DC}$ ont les mêmes coordonnées, donc $\vec{AB} = \vec{DC}$. Or un quadrilatère dont deux côtés opposés sont portés par des vecteurs égaux est un **parallélogramme** : $ABCD$ en est un.
- 3) $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 6 \times (-2) + 2 \times 6 = -12 + 12 = 0$. Les deux vecteurs sont donc orthogonaux : le parallélogramme possède un **angle droit en B**, c'est donc un rectangle.
- 4) $AB = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ cm et $BC = \sqrt{(-2)^2 + 6^2} = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ cm.
- 5) On a établi trois propriétés : $ABCD$ est un parallélogramme (question 2), il a un angle droit (question 3), et deux côtés consécutifs de même longueur (question 4). Un parallélogramme ayant un angle droit est un rectangle; un rectangle ayant deux côtés consécutifs égaux est un carré. La pièce est donc **conforme au plan** : c'est un carré de côté $2\sqrt{10} \approx 6,32$ cm.
- 6) $\vec{AC} \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$, donc $AC = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$ cm.
 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 6 \times 4 + 2 \times 8 = 24 + 16 = 40$.
 En notant α l'angle cherché,

$$\cos \alpha = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{AB \times AC} = \frac{40}{2\sqrt{10} \times 4\sqrt{5}} = \frac{40}{8\sqrt{50}} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

D'où $\alpha = 45^\circ$, ce qui était prévisible : dans un carré, la diagonale est aussi la bissectrice de l'angle droit.

Exercice 4 : Vrai ou faux ?

3 points

- 1) **Vrai.** On a $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \theta = 3 \times 4 \times \cos \theta = 12 \cos \theta$. L'égalité $12 \cos \theta = 12$ donne $\cos \theta = 1$, donc $\theta = 0^\circ$: les deux vecteurs ont la même direction et le même sens. (C'est le cas d'égalité : le produit scalaire ne peut jamais dépasser le produit des normes.)
- 2) **Vrai.** On développe en utilisant la bilinéarité, puis la symétrie du produit scalaire :

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2,$$

car $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$: les deux termes du milieu s'annulent.

- 3) **Faux.** Le produit scalaire ne se « simplifie » pas comme une multiplication de nombres. Contre-exemple : prenons $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2$ et $\vec{u} \cdot \vec{w} = 2$ également, alors que $\vec{v} \neq \vec{w}$. (Tout vecteur dont la première coordonnée vaut 2 convient : seule la projection sur $\vec{u}$ est imposée.)