

Calculatrice autorisée

Exercice 1 : Produit scalaire et triangle rectangle

5 points

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On considère les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

- 1) Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$, puis les normes $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$ (valeurs exactes).
- 2) En déduire une valeur approchée au dixième de degré de l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Cet angle est-il aigu ou obtus?
- 3) Calculer $\vec{u} \cdot \vec{w}$. Que peut-on en conclure pour ces deux vecteurs?
- 4) On considère les points $A(-1; 2)$, $B(3; -1)$ et $C(2; 6)$.
 - a. Déterminer les coordonnées de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.
 - b. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A .
 - c. Calculer AB et AC , puis en déduire la nature exacte du triangle ABC et la valeur de l'angle $\widehat{ABC}$.

Exercice 2 : Al-Kashi à l'envers

5 points

Un triangle DEF a pour dimensions $DE = 7$ cm, $DF = 5$ cm et $EF = 9$ cm.

- 1) À l'aide du théorème d'Al-Kashi, montrer que $\cos \widehat{EDF} = -\frac{1}{10}$.
- 2) En déduire une valeur approchée au dixième de degré de l'angle $\widehat{EDF}$.
- 3) Calculer $\vec{DE} \cdot \vec{DF}$. Que signifie le signe de ce produit scalaire?
- 4) Soit M le milieu de $[EF]$. En appliquant l'égalité du parallélogramme au parallélogramme construit sur $\vec{DE}$ et $\vec{DF}$, montrer que $DM^2 = \frac{67}{4}$, puis donner la longueur de la médiane DM au centième.

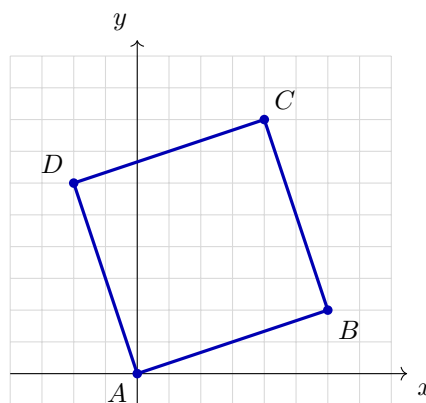
Exercice 3 : Contrôle d'une pièce usinée

7 points

Le contour d'une pièce métallique est relevé par une machine de mesure. Dans un repère orthonormé dont l'unité est le centimètre, les quatre sommets relevés sont

$$A(0; 0), \quad B(6; 2), \quad C(4; 8), \quad D(-2; 6).$$

Le plan de fabrication indique que cette pièce doit être **carrée**. On souhaite le vérifier.



- 1) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DC}$.
- 2) Démontrer que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Que peut-on en déduire, à ce stade, pour le quadrilatère $ABCD$?
- 3) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$. Qu'en déduit-on pour l'angle en B ?
- 4) Calculer les valeurs exactes de AB et BC .
- 5) Conclure : la pièce est-elle conforme au plan de fabrication? Justifier en citant les propriétés utilisées.
- 6) Calculer la valeur exacte de la diagonale AC , puis le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. En déduire la mesure exacte de l'angle entre le côté $[AB]$ et la diagonale $[AC]$.

Exercice 4 : Vrai ou faux?

3 points

Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

- 1) **Affirmation 1** : si $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 4$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 12$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens.
- 2) **Affirmation 2** : pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$.
- 3) **Affirmation 3** : si $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$ avec $\vec{u}$ non nul, alors $\vec{v} = \vec{w}$.