

Exercice 1 : Automatismes (QCM)

4 points

- 1) **Réponse b.** On multiplie par $\frac{\pi}{180} : 60 \times \frac{\pi}{180} = \frac{60\pi}{180} = \boxed{\frac{\pi}{3}}$.
- 2) **Réponse c.** C'est une valeur remarquable du cours : $\cos \frac{\pi}{6} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$. (Attention à ne pas la confondre avec $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.)
- 3) **Réponse d.** On retire un tour : $\frac{9\pi}{4} - 2\pi = \frac{9\pi}{4} - \frac{8\pi}{4} = \boxed{\frac{\pi}{4}}$, qui appartient bien à $] -\pi ; \pi]$.
- 4) **Réponse b.** Les points associés à x et à $\pi + x$ sont diamétralement opposés : leurs coordonnées sont opposées. Donc $\cos(\pi + x) = \boxed{-\cos x}$ (et de même $\sin(\pi + x) = -\sin x$).
- 5) **Réponse c.** Pour une fonction $t \mapsto A \sin(\omega t)$, l'amplitude est le coefficient A placé devant le sinus, ici $\boxed{5}$. Le nombre 2 est la pulsation ω , pas l'amplitude.

Exercice 2 : Lire le cercle trigonométrique

5 points

- 1) On lit l'angle de chaque rayon, puis on le convertit en radians en multipliant par $\frac{\pi}{180}$.
 A est à 120° , soit $\boxed{\frac{2\pi}{3}}$ B est à -120° , soit $\boxed{-\frac{2\pi}{3}}$ D est à 45° , soit $\boxed{\frac{\pi}{4}}$
 C est à 210° , qui n'appartient pas à $] -\pi ; \pi]$: on retire un tour, $210 - 360 = -150^\circ$, soit $\boxed{-\frac{5\pi}{6}}$.
- 2) Le cosinus d'une mesure est l'abscisse du point associé, son sinus en est l'ordonnée.

Point	A	B	C	D
Mesure	$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{5\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$
Cosinus	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
Sinus	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

Détail pour A : $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$, donc $\cos \frac{2\pi}{3} = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ et $\sin \frac{2\pi}{3} = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Détail pour C : $-\frac{5\pi}{6} = -\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$, donc son cosinus vaut $-\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et son sinus $-\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$.

- 3) Deux points symétriques par rapport à l'axe des abscisses ont la **même abscisse** et des **ordonnées opposées**. Comme le cosinus est l'abscisse et le sinus l'ordonnée, on en déduit que A et B ont $\boxed{\text{le même cosinus et des sinus opposés}}$.
C'est exactement ce que dit la propriété $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$, appliquée à $x = \frac{2\pi}{3}$, puisque B est associé à $-\frac{2\pi}{3}$.

Vérification sur le tableau : les deux cosinus valent bien $-\frac{1}{2}$, et les deux sinus, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, sont bien opposés.

Exercice 3 : Équations et angles associés

6 points

1) $2 \cos x - 1 = 0$ équivaut à $\cos x = \frac{1}{2}$. Sur le cercle, les points d'abscisse $\frac{1}{2}$ sont associés à $\frac{\pi}{3}$ et à $-\frac{\pi}{3}$ (symétriques par rapport à l'axe des abscisses). D'où $S = \left\{ -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3} \right\}$.

2) Les points d'ordonnée $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ sont associés à $-\frac{\pi}{3}$ et à son symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, $-\pi + \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}$. D'où $S = \left\{ -\frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{3} \right\}$.

3) On utilise deux angles associés : $\cos(\pi - x) = -\cos x$ (symétrie par rapport à l'axe des ordonnées) et $\cos(-x) = \cos x$ (le cosinus est pair). Donc

$$A = -\cos x + \cos x = 0.$$

4) De même, $\sin(\pi + x) = -\sin x$ et $\sin(\pi - x) = \sin x$. Donc

$$B = -\sin x + \sin x = 0.$$

5) De $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ on tire

$$\sin^2 x = 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}.$$

Donc $\sin x = \frac{\sqrt{8}}{3}$ ou $\sin x = -\frac{\sqrt{8}}{3}$. Comme x appartient à $\left] \frac{\pi}{2}; \pi \right]$, le point associé est dans le

demi-plan supérieur : son ordonnée est positive. Enfin $\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2}$, d'où $\sin x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Exercice 4 : Un signal périodique

5 points

1) La courbe oscille entre -4 et 4 : l'amplitude vaut 4 . Le motif se répète à l'identique tous les 2 secondes (par exemple d'un maximum à l'autre, de $t = 0,5$ à $t = 2,5$) : la période est $T = 2 \text{ s}$.

2) Ici $f(t) = 4 \sin(\pi t)$, donc la pulsation est $\omega = \pi$ et

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\pi} = 2 \text{ s},$$

ce qui confirme la lecture graphique.

3) $f(0,5) = 4 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 \times 1 = 4$.

$$f\left(\frac{1}{6}\right) = 4 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4 \times \frac{1}{2} = 2.$$

4) $f(t) = 0$ équivaut à $\sin(\pi t) = 0$. Le sinus s'annule pour les multiples de π : $\pi t = k\pi$ avec k entier, soit $t = k$. Sur $[0; 4]$, on obtient $t = 0, 1, 2, 3$ ou 4 . La courbe coupe bien l'axe des abscisses en ces cinq points.

5) $f(t) = 4$ équivaut à $\sin(\pi t) = 1$, ce qui a lieu pour $\pi t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, soit $t = \frac{1}{2} + 2k$. Sur $[0; 4]$, on obtient $t = 0,5$ ou $t = 2,5$. La courbe atteint bien son maximum 4 à ces deux instants, séparés d'exactement une période.