

Exercice 1 : Repérage sur le cercle trigonométrique

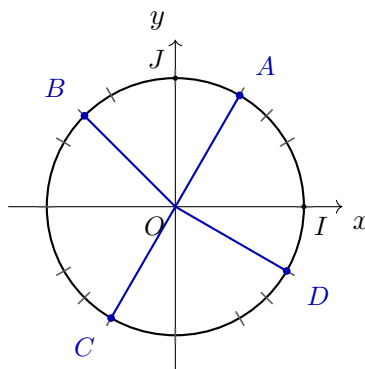
5 points

- 1) On passe des degrés aux radians en multipliant par $\frac{\pi}{180}$.

$$135^\circ = 135 \times \frac{\pi}{180} = \frac{135\pi}{180} = \boxed{\frac{3\pi}{4}} \quad \text{et} \quad 300^\circ = \frac{300\pi}{180} = \boxed{\frac{5\pi}{3}}.$$

Dans l'autre sens, on multiplie par $\frac{180}{\pi}$: $\frac{7\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} \times \frac{180}{\pi} = 7 \times 30 = \boxed{210^\circ}$.

- 2) On repère chaque réel par son angle en degrés : $\frac{\pi}{3} = 60^\circ$, $\frac{3\pi}{4} = 135^\circ$, $-\frac{2\pi}{3} = -120^\circ$ et $\frac{11\pi}{6} = 330^\circ$, soit -30° .



- 3) La mesure principale est l'unique mesure appartenant à $]-\pi ; \pi]$; on ajoute ou on retire des tours entiers, c'est-à-dire des multiples de 2π .

$$\frac{17\pi}{4} - 4\pi = \frac{17\pi}{4} - \frac{16\pi}{4} = \boxed{\frac{\pi}{4}} \quad (\text{on a retiré deux tours}).$$

$$-\frac{25\pi}{6} + 4\pi = -\frac{25\pi}{6} + \frac{24\pi}{6} = \boxed{-\frac{\pi}{6}} \quad (\text{on a ajouté deux tours}).$$

- 4) $\frac{11\pi}{3} - 4\pi = \frac{11\pi}{3} - \frac{12\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$. Les deux réels diffèrent d'un nombre entier de tours (2 tours exactement), donc ils sont bien associés au même point du cercle.

Exercice 2 : Angles associés et équations

5 points

1) $\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$, donc $\cos \frac{5\pi}{6} = -\cos \frac{\pi}{6} = \boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$.

$$\frac{3\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4}, \text{ donc } \sin \frac{3\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

Le cosinus est pair : $\cos \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \boxed{\frac{1}{2}}$.

$$\frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}, \text{ donc } \sin \frac{7\pi}{6} = -\sin \frac{\pi}{6} = \boxed{-\frac{1}{2}}.$$

- 2) De $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ on tire $\sin^2 x = 1 - 0,8^2 = 1 - 0,64 = 0,36$, donc $\sin x = 0,6$ ou $\sin x = -0,6$. Comme x appartient à $\left[-\frac{\pi}{2} ; 0\right]$, le point associé est dans le demi-plan inférieur du cercle : son ordonnée est négative. Donc $\sin x = -0,6$.

- 3) Sur le cercle, les points d'abscisse $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ sont ceux associés à $\frac{3\pi}{4}$ et à $-\frac{3\pi}{4}$ (symétriques par rapport à l'axe des abscisses). D'où $S = \left\{-\frac{3\pi}{4} ; \frac{3\pi}{4}\right\}$.

- 4) Les points d'ordonnée $\frac{1}{2}$ sont ceux associés à $\frac{\pi}{6}$ et à $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ (symétriques par rapport à l'axe des ordonnées). D'où $S = \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right\}$.

Exercice 3 : La grande roue

7 points

- 1) $h(0) = 22 - 20 \cos(0) = 22 - 20 \times 1 = 2$. La nacelle part donc de 2 mètres au-dessus du sol, ce qui est cohérent : l'axe est à 22 m et le rayon vaut 20 m, donc le point le plus bas de la roue est à $22 - 20 = 2$ m.
- 2) Ici $\omega = \frac{\pi}{2}$, donc $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \times \frac{2}{\pi} = 4$. Un tour complet dure 4 minutes.
- 3) Dans l'expression de h , le cosinus est précédé du signe $-$: la hauteur est donc maximale quand ce cosinus est minimal, c'est-à-dire égal à -1 . On a alors $h = 22 + 20 = 42$ mètres, ce qui correspond bien au point le plus haut de la roue. Cela se produit pour $\frac{\pi t}{2} = \pi$, soit $t = 2$ minutes : la moitié d'un tour, comme attendu.
- 4) $h(0,5) = 22 - 20 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 22 - 20 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 22 - 10\sqrt{2}$, soit environ $22 - 14,14 \approx 7,9$ m.
- 5) $h(t) = 22$ équivaut à $22 - 20 \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) = 22$, soit $\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) = 0$. Sur le cercle, le cosinus s'annule pour les réels $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$ (les points J et J'). Comme t parcourt $[0; 4]$, le réel $\frac{\pi t}{2}$ parcourt $[0; 2\pi]$: on obtient $\frac{\pi t}{2} = \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{\pi t}{2} = \frac{3\pi}{2}$, soit $t = 1$ ou $t = 3$. La nacelle passe à la hauteur de l'axe au quart et aux trois quarts du tour, une fois en montant et une fois en descendant.
- 6) On cherche $h(t) > 32$, c'est-à-dire $22 - 20 \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) > 32$, soit $-20 \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) > 10$. En divisant par -20 , on change le sens de l'inégalité : $\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) < -\frac{1}{2}$.
Sur le cercle, les points d'abscisse inférieure à $-\frac{1}{2}$ forment l'arc situé entre $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$. On a donc $\frac{2\pi}{3} < \frac{\pi t}{2} < \frac{4\pi}{3}$, d'où, en multipliant par $\frac{2}{\pi}$, $\frac{4}{3} < t < \frac{8}{3}$.
La durée cherchée vaut $\frac{8}{3} - \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$ minute, soit 1 min 20 s.

Exercice 4 : Vrai ou faux ?

3 points

- 1) **Vrai.** Les points associés à x et à $-x$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses : ils ont la même abscisse et des ordonnées opposées. Or l'ordonnée est le sinus, donc $\sin(-x) = -\sin x$: la fonction sinus est impaire.
- 2) **Faux.** Le cosinus d'un réel est l'abscisse d'un point du cercle trigonométrique, qui est de rayon 1 : elle est donc toujours comprise entre -1 et 1 . Comme $1,2 > 1$, aucun réel ne convient.
- 3) **Vrai.** Pour une fonction de la forme $t \mapsto A \cos(\omega t)$, la période vaut $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Ici $\omega = 4$, donc $T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.