

## Exercice 1 : Automatismes (QCM)

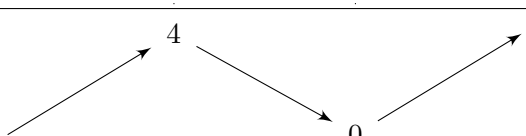
4 points

- 1) **Réponse a.** On dérive terme à terme : la dérivée de  $5x^2$  est  $5 \times 2x = 10x$ , celle de  $-3x$  est  $-3$ .  
D'où  $10x - 3$ .
- 2) **Réponse b.** Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse  $a$  est le nombre dérivé  $f'(3)$ . La valeur  $f(3)$  est l'ordonnée du point de contact, pas la pente.
- 3) **Réponse b.** Une fonction constante ne varie pas : sa courbe est une droite horizontale, de coefficient directeur nul. Sa dérivée est donc  $0$ .
- 4) **Réponse a.** La courbe de  $x \mapsto x^2$  est une parabole tournée vers le haut, de sommet  $(0; 0)$  : elle descend avant 0 et monte après. La fonction est donc décroissante sur  $]-\infty; 0]$ .
- 5) **Réponse c.**  $(2x - 3)^2 = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 3 + 3^2 = 4x^2 - 12x + 9$ .

## Exercice 2 : Variations d'une fonction de degré 3

5 points

- 1)  $f(0) = 0$  et  $f(3) = 27 - 6 \times 9 + 27 = 27 - 54 + 27 = 0$ .
- 2) On dérive terme à terme : la dérivée de  $x^3$  est  $3x^2$ , celle de  $-6x^2$  est  $-12x$ , celle de  $9x$  est 9. D'où  $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ .
- 3) On développe l'expression proposée :  $3(x-1)(x-3) = 3(x^2 - 3x - x + 3) = 3(x^2 - 4x + 3) = 3x^2 - 12x + 9$ . C'est bien  $f'(x)$ .
- 4) Le facteur 3 est positif ;  $x - 1$  s'annule en 1 et  $x - 3$  en 3.

|         |                                                                                      |   |   |           |   |
|---------|--------------------------------------------------------------------------------------|---|---|-----------|---|
| $x$     | $-\infty$                                                                            | 1 | 3 | $+\infty$ |   |
| $f'(x)$ | +                                                                                    | 0 | - | 0         | + |
| $f$     |  |   |   |           |   |

La fonction  $f$  est croissante sur  $]-\infty; 1]$ , décroissante sur  $[1; 3]$ , puis croissante sur  $[3; +\infty[$ .

- 5)  $f(1) = 1 - 6 + 9 = 4$ . La dérivée s'annule en changeant de signe en 1 et en 3 :  $f$  admet un maximum local 4 en  $x = 1$  et un minimum local 0 en  $x = 3$ .

### Exercice 3 : Lire la courbe de la dérivée

6 points

- 1) La courbe tracée est celle de  $f'$  : on lit donc directement ses ordonnées. En  $x = 0$ , elle passe par le point d'ordonnée  $-6$ , donc  $f'(0) = -6$ . Elle coupe l'axe des abscisses en  $-2$  et en  $2$ , donc  $f'(x) = 0$  pour  $x = -2$  et  $x = 2$ .
- 2) Le nombre dérivé est le coefficient directeur de la tangente. Comme  $f'(-2) = 0$  et  $f'(2) = 0$ , les tangentes à la courbe de  $f$  aux points d'abscisses  $-2$  et  $2$  ont un coefficient directeur nul : elles sont horizontales.
- 3) La courbe de  $f'$  est au-dessus de l'axe des abscisses avant  $-2$  et après  $2$ , et en dessous entre les deux.

|         |      |      |     |     |     |
|---------|------|------|-----|-----|-----|
| $x$     | $-4$ | $-2$ | $2$ | $4$ |     |
| $f'(x)$ | $+$  | $0$  | $-$ | $0$ | $+$ |

- 4) Le signe de  $f'$  donne les variations de  $f$  :  $f$  est croissante là où  $f'$  est positive, décroissante là où  $f'$  est négative.

|         |      |      |     |     |     |
|---------|------|------|-----|-----|-----|
| $x$     | $-4$ | $-2$ | $2$ | $4$ |     |
| $f'(x)$ | $+$  | $0$  | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f$     |      |      |     |     |     |

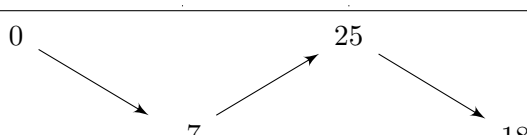
- 5) La dérivée s'annule en changeant de signe deux fois. En  $x = -2$ ,  $f'$  passe du positif au négatif :  $f$  cesse de croître pour décroître, c'est un maximum local,  $f(-2) = 9$ . En  $x = 2$ ,  $f'$  passe du négatif au positif : c'est un minimum local,  $f(2) = -7$ .
- 6) L'élève confond le signe de  $f'$  et le signe de  $f$ . Sur  $] -2 ; 2[$ , la courbe tracée est sous l'axe des abscisses : cela signifie que la dérivée  $y$  est négative, donc que  $f$  **est décroissante**. Cela ne dit rien du signe de  $f$  elle-même. On le voit sur le tableau :  $f(-2) = 9$  est positif alors que  $f'(-2) = 0$  et que  $f'$  est négative juste après.

### Exercice 4 : Le bénéfice d'un atelier

5 points

- 1)  $B(1) = -1 + 9 - 15 = \boxed{-7}$ . Le bénéfice est exprimé en milliers d'euros : l'atelier **perd** 7 000 € par jour, il n'est donc **pas bénéficiaire** avec 100 pièces par jour.
- 2) On dérive terme à terme :  $B'(x) = -3x^2 + 18x - 15$ . On développe l'expression proposée :  $-3(x-1)(x-5) = -3(x^2 - 5x - x + 5) = -3(x^2 - 6x + 5) = -3x^2 + 18x - 15$ . C'est bien  $B'(x)$ .
- 3) Le facteur  $-3$  est négatif;  $x-1$  s'annule en 1 et  $x-5$  en 5. Entre 1 et 5, le produit  $(x-1)(x-5)$  est négatif, donc  $B'(x)$  est positif.

|         |   |     |     |     |     |     |
|---------|---|-----|-----|-----|-----|-----|
| $x$     | 0 | 1   | 5   | 6   |     |     |
| $B'(x)$ |   | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $B$     | 0 |     |     | 25  |     | 18  |



- 4) Le maximum est atteint en  $x = 5$ , et  $B(5) = -125 + 225 - 75 = 25$ . La production la plus rentable est donc de **500 pièces par jour**, pour un bénéfice de **25 000 €** par jour.
- 5)  $B(2) = -8 + 36 - 30 = \boxed{-2}$  et  $B(3) = -27 + 81 - 45 = \boxed{9}$ . Entre  $x = 2$  et  $x = 3$ , le bénéfice passe donc du négatif au positif, et le tableau de variations montre que  $B$  est croissante sur  $[2; 3]$  : elle ne change de signe qu'une seule fois sur cet intervalle. L'atelier devient donc bénéficiaire pour une production comprise **entre 200 et 300 pièces par jour**.