

Exercice 1 : Lecture graphique

5 points

- 1) La fonction est donnée sous forme factorisée : un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul. Donc $x + 1 = 0$ ou $x - 5 = 0$, soit $x = -1$ ou $x = 5$. La courbe coupe bien l'axe des abscisses en ces deux points.
- 2) L'axe de symétrie d'une parabole passe par le milieu des deux racines : $x = \frac{-1 + 5}{2} = 2$, soit $x = 2$. Le sommet a pour abscisse 2 et pour ordonnée $f(2) = -2 \times 3 \times (-3) = 18$: $S(2; 18)$.
- 3) La courbe est au-dessus de l'axe des abscisses entre les deux racines : $S =]-1; 5[$. (Le coefficient -2 est négatif, la parabole est tournée vers le bas.)
- 4) $f(4) = -2 \times 5 \times (-1) = 10$. Comme $f(4) = 10$, le point $A(4; 10)$ appartient à $\mathcal{C}_f$.

Exercice 2 : Bénéfice d'un atelier

6 points

- 1) $B(0) = -0,5 \times (-20) \times (-120) = -1\,200$. Sans production, l'atelier perd 1 200 € par jour : ce sont ses frais fixes.
- 2) $B(x) = 0$ si et seulement si $x - 20 = 0$ ou $x - 120 = 0$, soit $x = 20$ ou $x = 120$. Ce sont les deux seuils de rentabilité : entre ces deux valeurs le bénéfice est positif, tandis qu'en dessous de 20 capteurs et au-dessus de 120 il est négatif, c'est-à-dire que l'atelier perd de l'argent.
- 3) Le facteur $-0,5$ est négatif, $x - 20$ s'annule en 20 et $x - 120$ en 120.

x	0	20	120	140	
$-0,5$	—	—	—		
$x - 20$	—	0	+	+	
$x - 120$	—	—	0	+	
$B(x)$	—	0	+	0	—

L'atelier est bénéficiaire lorsque $B(x) > 0$, c'est-à-dire pour $20 < x < 120$ capteurs par jour.

- 4) La courbe de B est une parabole tournée vers le bas : son maximum est atteint sur l'axe de symétrie, au milieu des racines, en $x = \frac{20 + 120}{2} = 70$.
 $B(70) = -0,5 \times 50 \times (-50) = 1\,250$. Le bénéfice est maximal pour 70 capteurs, et vaut 1 250 €.

Exercice 3 : Une boîte sans couvercle

6 points

- 1) Le côté découpé est une longueur, donc $x > 0$. De plus, on retire deux fois x sur la largeur de 20 cm : il faut $20 - 2x > 0$, c'est-à-dire $x < 10$. D'où $0 < x < 10$. (La condition sur la longueur, $x < 15$, est moins forte.)
- 2) $V(4) = 4 \times (30 - 8) \times (20 - 8) = 4 \times 22 \times 12 = 1\,056 \text{ cm}^3$.
- 3) $V(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$, ou $30 - 2x = 0$, ou $20 - 2x = 0$, soit $x = 0, x = 10$ ou $x = 15$.
Seules 0 et 10 appartiennent à l'intervalle d'étude : la valeur 15 a été écartée à la question 1, car on ne peut pas découper des carrés de 15 cm dans une plaque large de 20 cm. Sur $]0; 10[$, les trois facteurs x , $30 - 2x$ et $20 - 2x$ sont strictement positifs, donc $V(x) > 0$, et V s'annule aux deux bornes.
- 4) $V(3) = 3 \times 24 \times 14 = 1\,008$; $V(4) = 1\,056$; $V(5) = 5 \times 20 \times 10 = 1\,000$.
La plus grande des trois est $V(4) = 1\,056 \text{ cm}^3$: c'est la découpe de 4 cm.
- 5) On cherche a tel que $a^3 = 1\,728$, soit $a = \sqrt[3]{1\,728}$. Comme $12^3 = 1\,728$, l'arête mesure 12 cm .

Exercice 4 : Vrai ou faux ?

3 points

- 1) **Faux.** Un polynôme du second degré a au plus deux racines. S'il s'annule en -4 et en 6 , il s'écrit $a(x + 4)(x - 6)$, et en 1 il vaut $a \times 5 \times (-5) = -25a \neq 0$. La valeur 1 est l'abscisse de l'axe de symétrie, pas une racine : c'est le milieu de -4 et 6 .
- 2) **Vrai.** Le coefficient de x^2 est -3 , donc négatif : la parabole est tournée vers le bas et la fonction admet un maximum, atteint en $x = 0$ et égal à 5.
- 3) **Faux.** Les racines sont 2 et -3 . Entre les deux racines, un produit de deux facteurs du premier degré est du signe contraire à celui de son coefficient dominant, ici positif : le produit est donc *négatif* sur $] -3; 2[$. Par exemple, en $x = 0$, $(0 - 2)(0 + 3) = -6$.