

Exercice 1 : Automatismes (QCM)

4 points

- 1) **Réponse b.** $P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,1 + 0,4 = \boxed{0,5}$.
- 2) **Réponse a.** La seule valeur strictement supérieure à 2 est 5 : $P(X > 2) = P(X = 5) = \boxed{0,2}$.
- 3) **Réponse a.** $E(X) = 0 \times 0,1 + 1 \times 0,4 + 2 \times 0,3 + 5 \times 0,2 = 0,4 + 0,6 + 1 = \boxed{2}$.
- 4) **Réponse c.** Pour une loi de Bernoulli de paramètre p , $E(X) = 1 \times p + 0 \times (1 - p) = p = \boxed{0,3}$.
- 5) **Réponse c.** Les 4 épreuves sont indépendantes : $P(Y = 4) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \boxed{\frac{1}{16}}$.

Exercice 2 : Course de drones

6 points

- 1) X prend les valeurs 0, 1, 2 et 3. $\{X \leq 1\}$: « le pilote franchit au plus une porte » (aucune ou une seule).
- 2) Arbre à trois niveaux, branches 0,8 (franchie, F) et 0,2 (manquée, M), indépendantes. Un seul chemin donne $X = 3$: $P(X = 3) = 0,8^3 = 0,8 \times 0,64 = \boxed{0,512}$. Trois chemins donnent exactement deux portes franchies (MFF , FMF , FFM), chacun de probabilité $0,8^2 \times 0,2 = 0,128$: $P(X = 2) = 3 \times 0,128 = \boxed{0,384}$.
- 3) De même $P(X = 1) = 3 \times 0,8 \times 0,2^2 = 3 \times 0,032 = 0,096$ et $P(X = 0) = 0,2^3 = 0,008$. Contrôle : $0,008 + 0,096 + 0,384 + 0,512 = 1$.

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,008	0,096	0,384	0,512

- 4) $P(X \leq 1) = 0,008 + 0,096 = \boxed{0,104}$.
- 5) $E(X) = 0 \times 0,008 + 1 \times 0,096 + 2 \times 0,384 + 3 \times 0,512 = 0,096 + 0,768 + 1,536 = \boxed{2,4}$. Sur un grand nombre de passages, le pilote franchit en moyenne 2,4 portes par passage (ce qui est bien $3 \times 0,8$).
- 6) $G = 3X - 5$, donc $E(G) = 3E(X) - 5 = 3 \times 2,4 - 5 = \boxed{2,2 \text{ €}}$. L'espérance est positive : en moyenne, un passage rapporte 2,20 € au pilote. Sur de nombreux passages, il a intérêt à participer (même si un passage isolé peut lui faire perdre jusqu'à 5 €).

Exercice 3 : Trotinettes en libre-service

6 points

- 1) X ne prend que les valeurs 0 et 1, avec $P(X = 1) = 0,15$: X suit une **loi de Bernoulli de paramètre** $p = 0,15$, et $E(X) = p = \boxed{0,15}$.
- 2) **a.** On lit $\boxed{82}$ échantillons. Dans 82 des 500 échantillons simulés, on a compté 6 trotinettes sur 50 avec une batterie trop faible ($6/50 = 0,12$).
- b.** $[p - 2s; p + 2s] = [0,15 - 0,10; 0,15 + 0,10] = \boxed{[0,05; 0,25]}$. Les fréquences strictement à l'intérieur vont de 0,06 à 0,24 : $13 + 26 + 58 + 82 + 77 + 77 + 56 + 45 + 29 + 17 = 480$ échantillons, soit $\frac{480}{500} = \boxed{96\%}$.
- c.** À plus de $3s = 0,15$ de p , c'est-à-dire au-dessus de 0,30 (ou en dessous de 0, impossible) : un seul échantillon (fréquence 0,36), soit 0,2 % des échantillons.

- 3) Fréquence observée : $\frac{16}{50} = 0,32$. Elle est à 0,17 de p , soit plus de $3s$: dans les 500 simulations, aucun échantillon n'a atteint une telle fréquence. Dans le cadre du modèle « 15 % de batteries faibles », cette observation est **rare**. Le technicien peut douter que le modèle s'applique à cette station : elle a probablement un taux de batteries faibles plus élevé que la moyenne de la ville (station peu rechargée, par exemple).

Exercice 4 : Assurance d'un smartphone

4 points

- 1) Les trois cas s'excluent : $P(X = 0) = 1 - 0,12 - 0,03 = 0,85$.

x_i (€)	0	250	600
$P(X = x_i)$	0,85	0,12	0,03

- 2) $E(X) = 0 \times 0,85 + 250 \times 0,12 + 600 \times 0,03 = 30 + 18 = 48$ € : sur un grand nombre de contrats, un contrat coûte en moyenne 48 € à l'assureur.
- 3) Chaque contrat rapporte 60 € et coûte en moyenne 48 €, soit un bénéfice moyen de 12 € par contrat : pour 1 000 contrats, l'assureur peut espérer 12 000 €. Ce montant n'est pas garanti : le nombre réel de réparations et de remplacements fluctue d'une année à l'autre (fluctuation d'échantillonnage); l'espérance n'est qu'une moyenne sur le long terme.