

Exercice 1 : Automatismes (QCM)

4 points

- 1) **Réponse c.** Pour $z = a + ib$ avec a et b réels, la partie imaginaire est le réel b : $\text{Im}(z) = \boxed{5}$ (et non $5i$).
- 2) **Réponse c.** $(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = \boxed{2i}$.
- 3) **Réponse c.** $|3 - 4i| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = \boxed{5}$.
- 4) **Réponse b.** $2i - 7 = -7 + 2i$, donc son conjugué est $\boxed{-7 - 2i}$ (on change le signe de la partie imaginaire seulement).
- 5) **Réponse c.** $-3i = 3 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right)$: un argument est $\boxed{-\frac{\pi}{2}}$ (point de l'axe imaginaire, sous O).

Exercice 2 : Calculs sous forme algébrique

5 points

- 1) $z_1 + z_2 = (3 - 1) + (-2 + 4)i = \boxed{2 + 2i}$.
 $z_1 \times z_2 = (3 - 2i)(-1 + 4i) = -3 + 12i + 2i - 8i^2 = -3 + 14i + 8 = \boxed{5 + 14i}$ (car $i^2 = -1$).
- 2) $\overline{z_1} = \boxed{3 + 2i}$ et $z_1 \times \overline{z_1} = (3 - 2i)(3 + 2i) = 9 - (2i)^2 = 9 + 4 = \boxed{13}$.
Ce nombre est le carré du module de z_1 : $z_1 \overline{z_1} = |z_1|^2 = 13$.
- 3) On multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur, $\overline{z_2} = -1 - 4i$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(3 - 2i)(-1 - 4i)}{(-1 + 4i)(-1 - 4i)} = \frac{-3 - 12i + 2i + 8i^2}{(-1)^2 + 4^2} = \frac{-11 - 10i}{17} = \boxed{-\frac{11}{17} - \frac{10}{17}i}$$
- 4) De même : $\frac{1}{z_2} = \frac{\overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} = \frac{-1 - 4i}{17} = \boxed{-\frac{1}{17} - \frac{4}{17}i}$.
- 5) $|z_1| = \sqrt{9 + 4} = \boxed{\sqrt{13}}$ et $|z_2| = \sqrt{1 + 16} = \boxed{\sqrt{17}}$. Le module d'un produit est le produit des modules :

$$|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2| = \sqrt{13} \times \sqrt{17} = \boxed{\sqrt{221}}$$

Vérification avec la question 1 : $|5 + 14i| = \sqrt{25 + 196} = \sqrt{221}$. Les deux méthodes concordent.

Exercice 3 : Dans le plan complexe

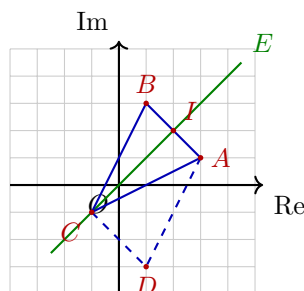
5 points

- 1) Voir la figure ci-dessous ($A(3; 1)$, $B(1; 3)$, $C(-1; -1)$).
- 2) L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A = (1 + 3i) - (3 + i) = \boxed{-2 + 2i}$. La distance AB est le module de cette affixe : $AB = |-2 + 2i| = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = \boxed{2\sqrt{2}}$.
- 3) $z_C - z_A = -4 - 2i$, donc $AC = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = \boxed{2\sqrt{5}}$. $z_C - z_B = -2 - 4i$, donc $BC = \sqrt{4 + 16} = \boxed{2\sqrt{5}}$.
 $AC = BC$: le triangle ABC est **isocèle en C**. (Il n'est pas rectangle : $AC^2 + BC^2 = 40 \neq AB^2 = 8$ et $AB^2 + AC^2 = 28 \neq BC^2$.)
- 4) $z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{4 + 4i}{2} = \boxed{2 + 2i}$.

5) $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, soit $z_B - z_A = z_C - z_D$, d'où

$$z_D = z_A + z_C - z_B = (3 + i) + (-1 - i) - (1 + 3i) = \boxed{1 - 3i}$$

6) $|z - z_A| = |z - z_B|$ signifie $AM = BM$: E est l'ensemble des points équidistants de A et de B , c'est-à-dire la **médiatrice du segment** $[AB]$. Elle passe par I (milieu de $[AB]$) et par C (car $CA = CB$, question 3) : c'est la droite (CI) .



Exercice 4 : Forme trigonométrique et tensions sinusoïdales

6 points

1) $|z_1| = \sqrt{3+1} = 2$, et $z_1 = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)$. On cherche θ tel que $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{1}{2}$: $\theta = \frac{\pi}{6}$.

Donc $\boxed{z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)}$.

$|z_2| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, et $z_2 = 2\sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = 2\sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)$. Avec $\cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$: $\theta = \frac{3\pi}{4}$. Donc $\boxed{z_2 = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)}$.

2) $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ et $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, donc $z_3 = 3 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2}i = \boxed{\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i}$.

3) a. $\underline{U}_1$ a pour module 6 et argument 0 : $\underline{U}_1 = 6(\cos 0 + i \sin 0) = \boxed{6}$. $\underline{U}_2$ a pour module 6 et argument $\frac{\pi}{2}$: $\underline{U}_2 = 6 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = \boxed{6i}$. Donc $\underline{U} = \boxed{6 + 6i}$.

b. $|\underline{U}| = \sqrt{36 + 36} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$ et $\underline{U} = 6\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)$, d'où un argument $\frac{\pi}{4}$. Amplitude de $u_1 + u_2$: $6\sqrt{2} \approx 8,5$ V ; phase à l'origine : $\frac{\pi}{4}$. Ainsi $\boxed{u_1 + u_2 = 6\sqrt{2} \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{4} \right)}$. Les amplitudes ne s'ajoutent pas ($12 \neq 8,5$) : les tensions sont déphasées.

c. Les vecteurs d'affixes 6 et $6i$ sont perpendiculaires et de même longueur (3 cm chacun); le vecteur d'affixe $6 + 6i$ est leur somme : c'est la **diagonale du parallélogramme** construit sur $\overrightarrow{OU_1}$ et $\overrightarrow{OU_2}$ (ici un carré), d'où l'angle $\frac{\pi}{4}$ et la longueur $6\sqrt{2}$ (diagonale d'un carré de côté 6).

