

Exercice 1 : Produit scalaire en coordonnées

6 points

- 1) Dans une base orthonormée, $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 2 + (-1) \times 4 = 6 - 4 = \boxed{2}$.
 $\|\vec{u}\| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \boxed{\sqrt{10}}$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = \boxed{2\sqrt{5}}$.
- 2) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \theta$, donc $\cos \theta = \frac{2}{\sqrt{10} \times 2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{50}} \approx 0,1414$. À la calculatrice : $\theta \approx 81,9^\circ$.
- 3) $\vec{u} \cdot \vec{w} = 3 \times 2 + (-1) \times 6 = 6 - 6 = 0$. Deux vecteurs non nuls sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul : $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux.
- 4) $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4-1 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \times 1 + 1 \times 4 = \boxed{7}$.
 $AB = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$ et $AC = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$, donc $\cos \widehat{BAC} = \frac{7}{\sqrt{10}\sqrt{17}} = \frac{7}{\sqrt{170}} \approx 0,5369$,
d'où $\widehat{BAC} \approx 57,5^\circ$.

Exercice 2 : Al-Kashi et parallélogramme

5 points

- 1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC} = 6 \times 8 \times \cos 60^\circ = 48 \times \frac{1}{2} = \boxed{24}$.
- 2) Théorème d'Al-Kashi : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos \widehat{BAC} = 36 + 64 - 2 \times 24 = 100 - 48 = 52$. Donc $BC = \sqrt{52} = \sqrt{4 \times 13} = \boxed{2\sqrt{13} \approx 7,21 \text{ cm}}$.
- 3) Al-Kashi au sommet B : $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \times AB \times BC \times \cos \widehat{ABC}$, donc

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \times AB \times BC} = \frac{36 + 52 - 64}{2 \times 6 \times 2\sqrt{13}} = \frac{24}{24\sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{13}} \approx 0,2774$$
d'où $\widehat{ABC} \approx 73,9^\circ$. (Contrôle : $\widehat{ACB} \approx 180 - 60 - 73,9 = 46,1^\circ$.)
- 4) Égalité du parallélogramme : $AD^2 = 2(AB^2 + AC^2) - BC^2 = 2 \times 100 - 52 = 148$, donc $AD = \sqrt{148} = 2\sqrt{37} \approx \boxed{12,17 \text{ cm}}$.
Autre méthode : $AD^2 = \|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\|^2 = AB^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 100 + 48 = 148$.

Exercice 3 : Travail d'une force

6 points

- 1) $W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} = \|\vec{F}\| \times AB \times \cos 30^\circ = 50 \times 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 300\sqrt{3} \approx \boxed{520 \text{ J}}$.
- 2) $F_h = 50 \times \cos 30^\circ = 25\sqrt{3} \approx 43,3 \text{ N}$: c'est la mesure de la projection orthogonale de $\vec{F}$ sur l'axe du déplacement. Alors $F_h \times AB = 25\sqrt{3} \times 12 = 300\sqrt{3} = W$: $\boxed{\text{on retrouve } W \approx 520 \text{ J}}$. Seule la composante de la force dans la direction du déplacement travaille.
- 3) Le poids est vertical et le déplacement horizontal : l'angle entre $\vec{P}$ et $\overrightarrow{AB}$ vaut 90° et $\cos 90^\circ = 0$. Donc $W_P = 200 \times 12 \times 0 = \boxed{0 \text{ J}}$: une force perpendiculaire au déplacement ne travaille pas.
- 4) $\vec{F}_2$ est horizontale, dans le sens du déplacement : $\vec{F}_2 \cdot \overrightarrow{AB} = 20 \times 12 \times \cos 0^\circ = 240 \text{ J}$. Par bilinéarité, le travail total est la somme des travaux :

$$W_{\text{total}} = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} + \vec{F}_2 \cdot \overrightarrow{AB} = 300\sqrt{3} + 240 \approx \boxed{760 \text{ J}}$$

Exercice 4 : Vrai ou faux ?**3 points**

- 1) **Faux.** Deux vecteurs non nuls orthogonaux ont un produit scalaire nul : par exemple $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$ (ou $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'exercice 1).
- 2) **Vrai.** L'angle entre $\vec{u}$ et lui-même est nul et $\cos 0 = 1$, donc $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| \times 1 = \|\vec{u}\|^2$ (en coordonnées : $x^2 + y^2$).
- 3) **Vrai.** $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$ avec des normes strictement positives : le signe du produit scalaire est celui de $\cos \theta$. Un cosinus négatif correspond à un angle $\theta \in]90^\circ ; 180^\circ]$, donc obtus.