

Exercice 1 : Lecture graphique

5 points

- 1) Le point $A(0; 4)$ est sur la courbe : $f(0) = 4$. Le point $B(1; 2)$ aussi : $f(1) = 2$.
- 2) Le nombre dérivé est le coefficient directeur de la tangente. T_0 passe par $A(0; 4)$ et $D(1; 1)$: coefficient directeur $\frac{1-4}{1-0} = -3$, donc $f'(0) = -3$. T_1 est horizontale : $f'(1) = 0$.
- 3) T_0 a pour coefficient directeur $f'(0) = -3$ et passe par $A(0; 4)$, donc son ordonnée à l'origine est 4 : $T_0 : y = -3x + 4$. (Formule générale : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ avec $a = 0$.)
- 4) Taux de variation entre 0 et 2 : $\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{6 - 4}{2} = 1$. C'est le coefficient directeur de la sécante à C_f passant par les points d'abscisses 0 et 2 (la droite qui joint $A(0; 4)$ au point $(2; 6)$).

Exercice 2 : Calculs de dérivées

5 points

- 1) On dérive terme à terme ($(x^2)' = 2x$, $(x^3)' = 3x^2$, $(kx)' = k$, constante $\rightarrow 0$) :
 - $g'(x) = 4 \times 2x - 5 = 8x - 5$
 - $h'(x) = 2 \times 3x^2 - 2x + 0 = 6x^2 - 2x$
 - $k'(x) = -0,5 \times 3x^2 + 3 = -1,5x^2 + 3$
 - On développe d'abord : $m(x) = 2x^2 + 6x - x - 3 = 2x^2 + 5x - 3$, donc $m'(x) = 4x + 5$
- 2) $g(1) = 4 - 5 + 1 = 0$ et $g'(1) = 8 - 5 = 3$. Équation de la tangente : $y = g'(1)(x - 1) + g(1) = 3(x - 1) + 0$, soit $y = 3x - 3$.

Exercice 3 : La boîte de plus grand volume

7 points

- 1) En repliant les bords, les carrés découpés de côté x deviennent la hauteur de la boîte : hauteur x . Sur chaque côté de la plaque (30 cm), on a retiré deux fois x : la base est un carré de côté $30 - 2x$. Volume = aire de la base $\times$ hauteur : $V(x) = x(30 - 2x)^2$.
- 2) $(30 - 2x)^2 = 900 - 120x + 4x^2$, donc $V(x) = x(900 - 120x + 4x^2) = 4x^3 - 120x^2 + 900x$.
- 3) $V'(x) = 4 \times 3x^2 - 120 \times 2x + 900 = 12x^2 - 240x + 900$. Or $12(x - 5)(x - 15) = 12(x^2 - 15x - 5x + 75) = 12x^2 - 240x + 900$. Donc $V'(x) = 12(x - 5)(x - 15)$.
- 4) Sur $[0; 15]$: $12 > 0$; $x - 5$ est négatif avant 5 et positif après; $x - 15 \leq 0$ (nul en 15). Donc $V'(x) \geq 0$ sur $[0; 5]$ et $V'(x) \leq 0$ sur $[5; 15]$. Avec $V(0) = 0$, $V(5) = 5 \times 20^2 = 2000$ et $V(15) = 15 \times 0 = 0$:

x	0	5	15
$V'(x)$	+	0	-
$V(x)$	0	2000	0

- 5) D'après le tableau, le volume est maximal pour $x = 5 \text{ cm}$ et vaut $V(5) = 2\,000 \text{ cm}^3$ (boîte de base $20 \times 20 \text{ cm}$ et de hauteur 5 cm).
- 6) $V(2) = 2 \times (30 - 4)^2 = 2 \times 676 = 1\,352 \text{ cm}^3$. Comme $1\,500 \leq 2\,000$ et que V est continue, croissante de 0 à 2 000 sur $[0 ; 5]$ puis décroissante de 2 000 à 0 sur $[5 ; 15]$, la valeur 1 500 est atteinte (deux fois, une fois sur chaque intervalle) : oui, une boîte de $1\,500 \text{ cm}^3$ est possible. (À la calculatrice : $x \approx 2,3 \text{ cm}$ ou $x \approx 8,3 \text{ cm}$.)

Exercice 4 : Vrai ou faux ?

3 points

- 1) **Vrai.** $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse a ; un coefficient directeur nul correspond à une droite horizontale (comme T_1 dans l'exercice 1).
- 2) **Faux.** La dérivée de $x \mapsto x^3$ est $x \mapsto 3x^2$ (par exemple $x \mapsto 3x$ est la dérivée de $x \mapsto \frac{3}{2}x^2$).
- 3) **Vrai.** $p'(x) = 3x^2 + 1$. Comme $3x^2 \geq 0$, on a $p'(x) \geq 1 > 0$ pour tout réel x : la dérivée est strictement positive, donc p est croissante sur $\mathbb{R}$.