

EXERCICE 1

1. Ensemble de définition :

La courbe commence au point d'abscisse -5 et se termine au point d'abscisse 5 .

$$\mathcal{D}_f = [-5 ; 5]$$

2. Lectures d'images et d'antécédents :

(a) Image de 3 et de (-2) :

- On se place en $x = 3$, on rejoint la courbe puis l'axe des ordonnées : $f(3) = -2$.
- On se place en $x = -2$, on rejoint la courbe puis l'axe des ordonnées : $f(-2) = 3$.

$$f(3) = -2 \quad \text{et} \quad f(-2) = 3$$

(b) Antécédents de 0 :

On cherche les abscisses des points d'intersection entre la courbe $\mathcal{C}_f$ et l'axe des abscisses ($y = 0$). On lit graphiquement deux valeurs :

$$S = \{1 ; 4\}$$

(c) Antécédents de 2 :

On trace la droite horizontale $y = 2$. On cherche les abscisses des points d'intersection avec la courbe. On lit graphiquement trois valeurs :

$$S = \{-5 ; -1 ; 4, 5\}$$

3. Extremums :

- Le **maximum** de f est atteint au sommet de la "bosse". On lit $y_{\max} = 4$ pour $x = -3$.
- Le **minimum** de f est atteint au creux de la courbe. On lit $y_{\min} = -3$ pour $x = 2$.

4. Intervalle image :

L'ensemble des valeurs prises par $f(x)$ (l'amplitude verticale de la courbe) va du minimum au maximum :

$$-3 \leq f(x) \leq 4$$

5. Tableau de variations :

x	-5	-3	2	5
f	2	4	-3	3

EXERCICE 2

On a $f(x) = 2x^2 + x - 6$ et $h(x) = \frac{x^2 - 4}{1 + x^2}$.

1. **Calcul de l'image de $(5 - \sqrt{2})$ par f :**

$$\begin{aligned} f(5 - \sqrt{2}) &= 2(5 - \sqrt{2})^2 + (5 - \sqrt{2}) - 6 \\ &= 2(25 - 10\sqrt{2} + 2) + 5 - \sqrt{2} - 6 \quad (\text{Identité remarquable } (a - b)^2) \\ &= 2(27 - 10\sqrt{2}) - \sqrt{2} - 1 \\ &= 54 - 20\sqrt{2} - \sqrt{2} - 1 \\ &= \boxed{53 - 21\sqrt{2}} \end{aligned}$$

2. **Calcul de l'image de $-\frac{2}{3}$ par h :**

$$\begin{aligned} h\left(-\frac{2}{3}\right) &= \frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 4}{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\frac{4}{9} - 4}{1 + \frac{4}{9}} = \frac{\frac{4}{9} - \frac{36}{9}}{\frac{9}{9} + \frac{4}{9}} \\ &= \frac{-\frac{32}{9}}{\frac{13}{9}} = -\frac{32}{9} \times \frac{9}{13} = \boxed{-\frac{32}{13}} \end{aligned}$$

3. **Forme canonique :**

Développons l'expression proposée : $2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{49}{8}$.

$$\begin{aligned} 2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{49}{8} &= 2\left(x^2 + 2 \times x \times \frac{1}{4} + \frac{1}{16}\right) - \frac{49}{8} \\ &= 2\left(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}\right) - \frac{49}{8} \\ &= 2x^2 + x + \frac{2}{16} - \frac{49}{8} \\ &= 2x^2 + x + \frac{1}{8} - \frac{49}{8} \\ &= 2x^2 + x - \frac{48}{8} \\ &= 2x^2 + x - 6 = f(x) \end{aligned}$$

L'égalité est vérifiée.

4. **Factorisation :** On utilise l'indication : $f(x) = 2\left[\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{49}{16}\right]$. On reconnaît une différence

de carrés $A^2 - B^2$ avec $A = (x + \frac{1}{4})$ et $B = \sqrt{\frac{49}{16}} = \frac{7}{4}$.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 \left[\left(x + \frac{1}{4} - \frac{7}{4} \right) \left(x + \frac{1}{4} + \frac{7}{4} \right) \right] \\ &= 2 \left[\left(x - \frac{6}{4} \right) \left(x + \frac{8}{4} \right) \right] \\ &= 2 \left(x - \frac{3}{2} \right) (x + 2) \end{aligned}$$

En distribuant le 2 dans la première parenthèse pour éviter les fractions (optionnel) :

$$f(x) = (2x - 3)(x + 2)$$

5. Antécédents de 0 :

On résout $f(x) = 0$. Il est préférable d'utiliser la forme factorisée (équation produit nul).

$$(2x - 3)(x + 2) = 0 \iff 2x - 3 = 0 \text{ ou } x + 2 = 0$$

$$\iff 2x = 3 \text{ ou } x = -2$$

$$\iff x = \frac{3}{2} = 1,5 \text{ ou } x = -2$$

Les antécédents de 0 sont -2 et $1,5$.

6. Antécédents de $-\frac{49}{8}$:

On résout $f(x) = -\frac{49}{8}$. Utilisons la forme canonique qui contient ce terme.

$$2 \left(x + \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{49}{8} = -\frac{49}{8} \iff 2 \left(x + \frac{1}{4} \right)^2 = 0$$

Un carré est nul si et seulement si le nombre est nul :

$$x + \frac{1}{4} = 0 \iff x = -0,25$$

7. Minoration :

Pour tout réel x , un carré est toujours positif ou nul : $\left(x + \frac{1}{4} \right)^2 \geq 0$. En multipliant par 2 (positif) :

$2 \left(x + \frac{1}{4} \right)^2 \geq 0$. En soustrayant $\frac{49}{8}$ de chaque côté :

$$2 \left(x + \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{49}{8} \geq -\frac{49}{8} \iff f(x) \geq -\frac{49}{8}$$

8. Extremum :

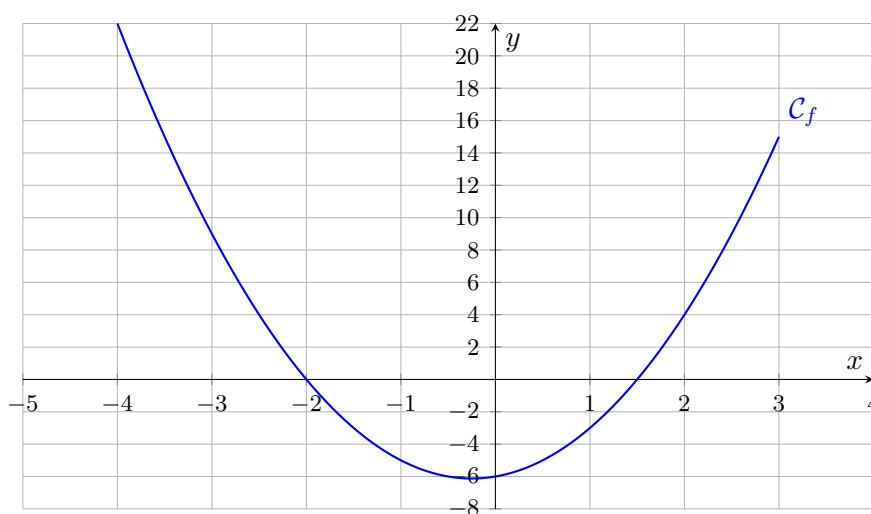
Puisque $f(x) \geq -\frac{49}{8}$ pour tout x , la fonction admet un **minimum**. Ce minimum vaut $-\frac{49}{8}$ (soit

$-6, 125)$ et il est atteint lorsque le carré s'annule, c'est-à-dire pour $x = -0, 25$.

9. Tableau de valeurs :

x	-4	-3,5	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$f(x)$	22	15	9	4	0	-3	-5	-6	-6	-5	-3	0	4	9	15

10. Tracé de la courbe :



11. Parité de la fonction h :

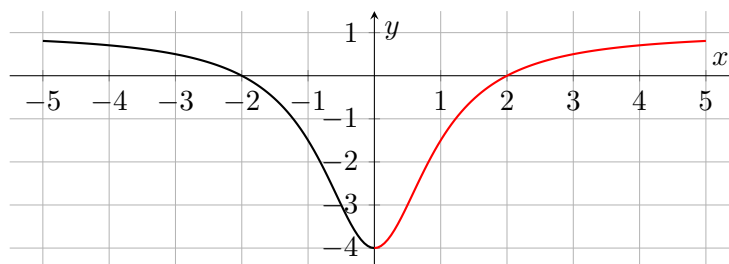
L'ensemble de définition est $\mathbb{R}$ (car $1 + x^2$ n'est jamais nul), donc centré en 0. Calculons $h(-x)$:

$$h(-x) = \frac{(-x)^2 - 4}{1 + (-x)^2} = \frac{x^2 - 4}{1 + x^2} = h(x)$$

Puisque $h(-x) = h(x)$, la fonction h est **paire**.

12. Compléter la courbe :

Comme la fonction est paire, sa représentation graphique est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**. On reproduit donc le motif de gauche à droite par symétrie axiale.



EXERCICE 3

1. Expression de l'aire $f(x)$:

Le logo est composé d'un rectangle (le mur) surmonté d'un triangle isocèle (le toit).

Dimensions :

- La largeur totale est de 3. Le toit débordé de x de chaque côté ($CD = x$ et $EF = x$).
- La base du triangle (segment CF) mesure 3.
- La largeur du rectangle (segment DE) mesure $3 - x - x = 3 - 2x$.
- La hauteur totale est 2. La hauteur du toit (partie triangulaire au-dessus de la ligne CF) est $2x$ (distance AB).
- La hauteur du rectangle (mur) est donc la hauteur totale moins la hauteur du toit : $2 - 2x$.

Calcul des aires :

- Aire du rectangle = Largeur $\times$ Hauteur = $(3 - 2x) \times (2 - 2x)$.
- Aire du triangle = $\frac{\text{Base} \times \text{Hauteur}}{2} = \frac{3 \times 2x}{2} = 3x$.

Aire totale $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= (3 - 2x)(2 - 2x) + 3x \\ &= (6 - 6x - 4x + 4x^2) + 3x \quad (\text{Développement}) \\ &= 4x^2 - 10x + 6 + 3x \\ &= \boxed{4x^2 - 7x + 6} \end{aligned}$$

On retrouve bien l'expression demandée.

2. Tableau de valeurs :

x	0	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	1
$f(x)$	6	4,26	3,84	3,5	3,24	3,06	2,96	3

3. Résolution de problèmes :

a) Aire égale à $3,8 \text{ m}^2$:

- **Graphiquement** : On trace la ligne $y = 3,8$. Elle coupe la courbe à une abscisse comprise entre 0,4 et 0,5. On peut estimer $x \approx 0,41$.
- **À la calculatrice** : On cherche x tel que $4x^2 - 7x + 6 = 3,8$. En tabulant ou en utilisant le solveur, on trouve $x \approx 0,414$. Valeur approchée au millièmes : $x \approx 0,414$.

b) Aire inférieure à $2,96 \text{ m}^2$: On résout l'inéquation $f(x) < 2,96$.

$$4x^2 - 7x + 6 < 2,96 \iff 4x^2 - 7x + 3,04 < 0$$

À la calculatrice (en affichant le graphique de $y = 4x^2 - 7x + 3,04$ ou en cherchant les racines) : Les racines de $4x^2 - 7x + 3,04 = 0$ sont $x_1 = 0,8$ et $x_2 = 0,95$. Le polynôme est du signe de a (ici positif) à l'extérieur des racines, et négatif entre les racines.

L'aire est donc inférieure à $2,96 \text{ m}^2$ pour x compris entre 0,8 et 0,95.

$$x \in]0,80 ; 0,95[$$