

Exercice 1 : Inéquations linéaires

a) $-3 - 4x > 5$

$-4x > 5 + 3$

$-4x > 8$

On divise par -4 (négatif), on change le sens :

$$x < \frac{8}{-4} \iff x < -2$$

Solution : $S =] - \infty ; -2[$

c) $9 - 2x > \frac{4}{3}$

$-2x > \frac{4}{3} - 9$

$-2x > \frac{4}{3} - \frac{27}{3}$

$-2x > -\frac{23}{3}$

$x < \frac{-23/3}{-2} \iff x < \frac{23}{6}$

Solution : $S = \left] -\infty ; \frac{23}{6} \right[$

e) $\frac{x-3}{4} < \frac{2-7x}{3}$

On met au même dénominateur (12) ou on fait le produit en croix (car 3 et 4 positifs) :

$3(x-3) < 4(2-7x)$

$3x - 9 < 8 - 28x$

$3x + 28x < 8 + 9$

$31x < 17 \iff x < \frac{17}{31}$

Solution : $S = \left] -\infty ; \frac{17}{31} \right[$

b) $3 - 6x \geq 5 - 4x$

$-6x + 4x \geq 5 - 3$

$-2x \geq 2$

On divise par -2 (négatif), on change le sens :

$$x \leq \frac{2}{-2} \iff x \leq -1$$

Solution : $S =] - \infty ; -1]$

d) $5 + 2(x-3) > -3x + 4$

$5 + 2x - 6 > -3x + 4$

$2x - 1 > -3x + 4$

$2x + 3x > 4 + 1$

$5x > 5 \iff x > 1$

Solution : $S =]1 ; +\infty[$

Exercice 2 :  tude de signes

1. $(x-2)(3+2x) \leq 0$

Racines : $x-2=0 \iff x=2$ et $3+2x=0 \iff x=-1,5$.

x	$-\infty$	$-1,5$	2	$+\infty$
$x-2$	$-$	$-$	0	$+$
$3+2x$	$-$	0	$+$	$+$
Produit	$+$	0	$-$	$+$

On cherche ≤ 0 (le signe $-$).

Solution : $S = [-1,5; 2]$

2. $(4 - x)(2 + 3x) \geq 0$

Racines : $4 - x = 0 \iff x = 4$ et $2 + 3x = 0 \iff x = -2/3$.

x	$-\infty$	$-2/3$	4	$+\infty$	
$4 - x$	+	+	0	-	
$2 + 3x$	-	0	+	+	
Produit	-	0	+	0	-

On cherche ≥ 0 (le signe $+$).

Solution : $S = \left[-\frac{2}{3}; 4\right]$

3. $\frac{(1 - x)(2x + 3)}{2x + 1} \geq 0$

Valeur interdite : $2x + 1 = 0 \iff x = -0,5$.

Racines : $1 - x = 0 \iff x = 1$ et $2x + 3 = 0 \iff x = -1,5$.

x	$-\infty$	$-1,5$	$-0,5$	1	$+\infty$	
$1 - x$	+	+	+	0	-	
$2x + 3$	-	0	+	+	+	
$2x + 1$	-	-	0	+	+	
Quotient	+	0	-	+	0	-

On cherche ≥ 0 .

Solution : $S =]-\infty; -1,5] \cup]-0,5; 1]$

4. $\frac{2x - 5}{3 + 5x} \leq 0$

Valeur interdite : $3 + 5x = 0 \iff x = -0,6$.

Racine : $2x - 5 = 0 \iff x = 2,5$.

x	$-\infty$	$-0,6$	$2,5$	$+\infty$
$2x - 5$	$-$	$-$	0	$+$
$3 + 5x$	$-$	0	$+$	$+$
Quotient	$+$	$-$	0	$+$

Solution : $S =] - 0,6 ; 2,5]$

Exercice 3 : Valeur absolue

1. $|x - 15| > 7$

Cela signifie que la distance entre x et 15 est strictement supérieure à 7.

$$x - 15 > 7 \iff x > 22 \quad \text{ou} \quad x - 15 < -7 \iff x < 8$$

Solution : $S =] - \infty ; 8[\cup] 22 ; +\infty [$

2. $|x + 4| \leq 2$

$|x - (-4)| \leq 2$. La distance entre x et -4 est inférieure ou égale à 2.

$$-2 \leq x + 4 \leq 2$$

$$-2 - 4 \leq x \leq 2 - 4$$

$$-6 \leq x \leq -2$$

Solution : $S = [-6 ; -2]$

3. $|2x - 6| < 4$

On factorise par 2 dans la valeur absolue : $|2(x - 3)| < 4 \iff 2|x - 3| < 4$.

En divisant par 2 : $|x - 3| < 2$.

La distance entre x et 3 est strictement inférieure à 2.

$$3 - 2 < x < 3 + 2$$

$$1 < x < 5$$

Solution : $S =] 1 ; 5 [$

Exercice 4 : Factorisation et inéquations

1. $(-2x + 4)^2 \geq (-2x + 4)(x - 1)$

On passe tout à gauche :

$$(-2x + 4)^2 - (-2x + 4)(x - 1) \geq 0$$

On factorise par $(-2x + 4)$:

$$(-2x + 4)[(-2x + 4) - (x - 1)] \geq 0$$

$$(-2x + 4)[-2x + 4 - x + 1] \geq 0$$

$$(-2x + 4)(-3x + 5) \geq 0$$

Racines : $-2x + 4 = 0 \implies x = 2$ et $-3x + 5 = 0 \implies x = 5/3$.

Tableau de signes :

x	$-\infty$	$5/3$	2	$+\infty$	
$-2x + 4$	+	+	0	-	
$-3x + 5$	+	0	-	-	
Produit	+	0	-	0	+

Solution : $S = \left[\frac{5}{3}; 2 \right]$

2. $(3x - 7)^2 < (5x - 9)^2$

Inéquation de la forme $A^2 < B^2 \iff A^2 - B^2 < 0$.

$$(3x - 7)^2 - (5x - 9)^2 < 0$$

On factorise avec $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$:

$$[(3x - 7) - (5x - 9)][(3x - 7) + (5x - 9)] < 0$$

$$[3x - 7 - 5x + 9][3x - 7 + 5x - 9] < 0$$

$$(-2x + 2)(8x - 16) < 0$$

On peut simplifier par 2 et 8 pour alléger : $-2(x - 1) \times 8(x - 2) < 0 \iff -16(x - 1)(x - 2) < 0$.

Diviser par -16 change le sens : $(x - 1)(x - 2) > 0$.

Un polynôme du second degré est du signe de a (ici positif) à l'extérieur des racines. **Solution :**

$S =]-\infty; 1[\cup]2; +\infty[$

Exercice 5 : Démonstration et déduction

1. Montrer l'égalité :

Développons le membre de gauche $A = (-2x + 1)(x - 3) + 25$:

$$A = (-2x^2 + 6x + x - 3) + 25 = -2x^2 + 7x + 22$$

Développons le membre de droite $B = (-2x + 11)(x + 2)$:

$$B = -2x^2 - 4x + 11x + 22 = -2x^2 + 7x + 22$$

On a bien $A = B$. L'égalité est vraie pour tout réel x .

2. Résoudre l'inéquation :

$$(-2x + 1)(x - 3) \geq -25$$

$$(-2x + 1)(x - 3) + 25 \geq 0$$

D'après la question précédente, cela revient à résoudre :

$$(-2x + 11)(x + 2) \geq 0$$

Racines : $x = 5,5$ et $x = -2$.

Le coefficient devant x^2 serait -2 (négatif), donc le polynôme est positif **entre** les racines. **So-**

lution : $S = [-2; 5,5]$

Exercice 6 : Problème d'aire

1. Expression de l'aire :

Aire du grand carré $ABCD = 5 \times 5 = 25$.

Aire du carré blanc $AEMF = x \times x = x^2$.

L'aire grisée est la différence : $\mathcal{A}(x) = 25 - x^2$.

2. Comparaison avec $x + 5$:

(a) On veut résoudre $\mathcal{A}(x) > x + 5$.

$$25 - x^2 > x + 5$$

$$(25 - x^2) - (x + 5) > 0$$

On reconnaît l'identité remarquable $25 - x^2 = 5^2 - x^2 = (5 - x)(5 + x)$.

$$(5 - x)(5 + x) - (x + 5) > 0$$

C'est bien l'inéquation demandée.

(b) **Résolution** : On factorise par le terme commun $(x + 5)$:

$$(x + 5)[(5 - x) - 1] > 0$$

$$(x + 5)(4 - x) > 0$$

Faisons un tableau de signes rapide sur $\mathbb{R}$. Racines : -5 et 4 .

x	$-\infty$	-5	4	$+\infty$
$x + 5$	$-$	0	$+$	$+$
$4 - x$	$+$	$+$	0	$-$
Produit	$-$	0	$+$	$-$

Sur $\mathbb{R}$, le produit est strictement positif sur $] -5 ; 4[$.

Or, l'énoncé précise que x est une longueur géométrique et $x \in]0 ; 5[$.

On cherche l'intersection de l'intervalle solution mathématique $] -5 ; 4[$ avec l'intervalle de définition $]0 ; 5[$.

$$S =] -5 ; 4[\cap]0 ; 5[=]0 ; 4[$$

Conclusion : L'aire grisée est supérieure à $x + 5$ pour tout x compris strictement entre 0 et 4 .

Exercice 7 : Le coin du chercheur

$$\frac{1}{x+2} - 1 \leq \frac{4}{4-x^2}$$

1. **Valeurs interdites** : $x + 2 \neq 0 \iff x \neq -2$ et $4 - x^2 \neq 0 \iff x^2 \neq 4 \iff x \neq 2$ et $x \neq -2$.
L'ensemble de définition est $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$.

2. **Transformation** : Remarquons que $4 - x^2 = (2 - x)(2 + x)$. Passons tout à gauche :

$$\frac{1}{x+2} - 1 - \frac{4}{(2-x)(2+x)} \leq 0$$

Mise au même dénominateur $(2 - x)(2 + x)$. Attention, $x + 2 = 2 + x$. Le 1er terme doit être multiplié par $(2 - x)$. Le terme -1 doit être multiplié par $(2 - x)(2 + x) = 4 - x^2$.

$$\begin{aligned} \frac{1(2-x) - 1(4-x^2) - 4}{(2-x)(2+x)} &\leq 0 \\ \frac{2-x-4+x^2-4}{(2-x)(2+x)} &\leq 0 \\ \frac{x^2-x-6}{(2-x)(2+x)} &\leq 0 \end{aligned}$$

3. Factorisation du numérateur $N(x) = x^2 - x - 6$:

On cherche les racines (discriminant ou racine évidente). $\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-6) = 1 + 24 = 25$.

$x_1 = \frac{1-5}{2} = -2$ et $x_2 = \frac{1+5}{2} = 3$. Donc $x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$.

4. Simplification : L'inéquation devient :

$$\frac{(x+2)(x-3)}{(2-x)(2+x)} \leq 0$$

On peut simplifier par $(x+2)$ car $x \neq -2$.

$$\frac{x-3}{2-x} \leq 0$$

5. Tableau de signes :

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
$x-3$	-	-	0	+
$2-x$	+	0	-	-
Quotient	-	+	0	-

On cherche ≤ 0 . Les solutions sont $] -\infty ; 2[\cup [3 ; +\infty[$.

Attention, il faut exclure la valeur interdite -2 qui est dans le premier intervalle.

Solution finale : $S =] -\infty ; -2[\cup] -2 ; 2[\cup [3 ; +\infty[$