Exercice 1 : Inéquations linéaires (Technique de base)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes. On donnera les solutions sous forme d'intervalles.

a) $-3 - 4x > 5$

b) $3 - 6x \geqslant 5 - 4x$

c) $9 - 2x > \dfrac{4}{3}$

d) $5 + 2(x-3) > -3x + 4$

e) $\dfrac{x-3}{4} < \dfrac{2-7x}{3}$

Exercice 2 : Étude de signes (Tableaux de signes)

À l'aide d'un tableau de signes, résoudre les inéquations suivantes :

1. $(x-2)(3+2x) \leqslant 0$
2. $(4-x)(2+3x) \geqslant 0$
3. $\dfrac{(1-x)(2x+3)}{2x+1} \geqslant 0$
4. $\dfrac{2x-5}{3+5x} \leqslant 0$

Exercice 3 : Valeur absolue

Résoudre les inéquations suivantes (on pourra s'aider d'une interprétation géométrique en termes de distance) :

1. $|x - 15| > 7$
2. $|x + 4| \leqslant 2$
3. $|2x - 6| < 4$

Exercice 4 : Factorisation et inéquations

En factorisant d'abord (facteur commun ou identité remarquable), se ramener à une inéquation produit puis résoudre :

1. $(-2x+4)^2 \geqslant (-2x+4)(x-1)$
2. $(3x-7)^2 < (5x-9)^2$

Exercice 5 : Démonstration et déduction

1. Montrer que pour tout réel x :

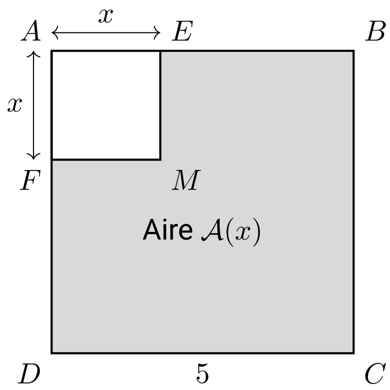
$$(-2x+1)(x-3)+25=(-2x+11)(x+2)$$

2. En déduire les solutions de l'inéquation suivante :

$$(-2x+1)(x-3)\geqslant -25$$

Exercice 6 : Problème d'aire (Géométrie et factorisation)

On considère un carré $ABCD$ de côté 5. À l'intérieur de celui-ci, on a placé un point M sur le segment $[AC]$ (la diagonale) tel que le carré $AEMF$ (en blanc sur la figure) soit de côté x. La partie grisée correspond au carré $ABCD$ privé du carré $AEMF$.



On suppose que x est un réel compris strictement entre 0 et 5 ($x \in]0;5[$).

1. Exprimer l'aire $\mathcal{A}(x)$ de la partie grisée en fonction de x.
2. On cherche à déterminer les valeurs de x pour lesquelles l'aire grisée est strictement supérieure à $x+5$.
   (a) Montrer que résoudre l'inéquation $\mathcal{A}(x) > x+5$ revient à résoudre l'inéquation :

$$(5-x)(x+5)-(x+5)>0$$

   (b) Résoudre l'inéquation et conclure sur les valeurs de x possibles.

Exercice 7 : Le coin du chercheur

Après avoir déterminé les valeurs interdites, résoudre l'inéquation suivante :

$$\frac{1}{x+2} - 1 \leqslant \frac{4}{4-x^2}$$