Exercice 1 : Résolution d'équations

Partie A : Équations produits et factorisation

1. $4(3x-1)(1-x)=0$
Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul.

$$\begin{aligned} 3x-1=0 \quad &\text{ou} \quad 1-x=0 \\ 3x=1 \quad &\text{ou} \quad x=1 \\ x=\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Solution : $\boxed{S=\left\{\frac{1}{3}\,;\,1\right\}}$

2. $4x^2=-2$
Cette équation s'écrit $x^2=-\frac{2}{4}=-0,5$.
Or, pour tout réel x, $x^2\geqslant 0$. Un carré ne peut pas être négatif.
Solution : $\boxed{S=\varnothing}$

3. $\left(2x+\frac{1}{2}\right)^2=0$
Un nombre au carré est nul si et seulement si ce nombre est nul.

$$2x+\frac{1}{2}=0 \iff 2x=-\frac{1}{2} \iff x=\frac{-1/2}{2}=-\frac{1}{4}$$

Solution : $\boxed{S=\left\{-\frac{1}{4}\right\}}$

4. $4x^2=5x$
Attention à ne pas diviser par x (qui peut valoir 0). On regroupe tout dans le membre de gauche et on factorise.

$$\begin{aligned} 4x^2-5x&=0 \\ x(4x-5)&=0 \end{aligned}$$

C'est une équation produit nul :

$$x=0 \quad \text{ou} \quad 4x-5=0 \iff x=\frac{5}{4}$$

Solution : $\boxed{S=\left\{0\,;\,\frac{5}{4}\right\}}$

5. $(x-2)(2x-3)-(x-2)(7x+2)=0$

On factorise par le facteur commun $(x-2)$:

$$\begin{aligned}(x-2)\left[(2x-3)-(7x+2)\right]&=0\\(x-2)(2x-3-7x-2)&=0\\(x-2)(-5x-5)&=0\end{aligned}$$

Soit $x-2=0 \iff x=2.$
Soit $-5x-5=0 \iff -5x=5 \iff x=-1.$
Solution : $\boxed{S=\{-1\,;2\}}$

Partie B : Équations quotients

6. $\dfrac{10x-3}{x+1}=0$
Valeur interdite : Le dénominateur ne doit pas être nul : $x+1\neq 0 \iff x\neq -1.$
Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul.

$$10x-3=0 \iff 10x=3 \iff x=\frac{3}{10}$$

La valeur $0,3$ est différente de -1, on la conserve.
Solution : $\boxed{S=\left\{\dfrac{3}{10}\right\}}$

7. $\dfrac{x-3}{x-5}+4=0$
Valeur interdite : $x-5\neq 0 \iff x\neq 5.$
On met au même dénominateur :

$$\begin{aligned}\frac{x-3}{x-5}+\frac{4(x-5)}{x-5}&=0\\\frac{x-3+4x-20}{x-5}&=0\\\frac{5x-23}{x-5}&=0\end{aligned}$$

Le numérateur doit être nul : $5x-23=0 \iff 5x=23 \iff x=\dfrac{23}{5}.$
Cette valeur est différente de 5 (car $23/5=4,6$).
Solution : $\boxed{S=\left\{\dfrac{23}{5}\right\}}$

8. $\dfrac{(4x-2)(x+10)}{2x-1}=0$

Valeur interdite : $2x-1\neq 0 \iff 2x\neq 1 \iff \boxed{x\neq\dfrac{1}{2}}.$

On annule le numérateur (équation produit) :

$$\begin{aligned} 4x - 2 = 0 &\quad \text{ou} \quad x + 10 = 0 \\ 4x = 2 &\quad \text{ou} \quad x = -10 \\ x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} &\quad \text{ou} \quad x = -10 \end{aligned}$$

Attention : La solution $x = 1/2$ est la valeur interdite ! On doit la rejeter.
Solution : $\boxed{S = \{-10\}}$

Partie C : Valeurs absolues

9. $|x - 1| = 3$
   Cela signifie que la distance entre x et 1 vaut 3.

$$x - 1 = 3 \iff x = 4 \quad \text{ou} \quad x - 1 = -3 \iff x = -2$$

   Solution : $\boxed{S = \{-2\,;\,4\}}$

10. $|x + 6| = 10$

$$x + 6 = 10 \iff x = 4 \quad \text{ou} \quad x + 6 = -10 \iff x = -16$$

   Solution : $\boxed{S = \{-16\,;\,4\}}$

11. $|2x + 14| = 26$

$$2x + 14 = 26 \iff 2x = 12 \iff x = 6$$

ou

$$2x + 14 = -26 \iff 2x = -40 \iff x = -20$$

   Solution : $\boxed{S = \{-20\,;\,6\}}$

Exercice 2 : Étude d'une expression littérale

Expression : $E(x) = (5x - 3)^2 - 2(x - 1)(5x - 3)$.

1. **Développement :** On utilise l'identité remarquable $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ et la double distributivité.

$$\begin{aligned} E(x) &= [(5x)^2 - 2 \times 5x \times 3 + 3^2] - 2[5x^2 - 3x - 5x + 3] \\ E(x) &= (25x^2 - 30x + 9) - 2(5x^2 - 8x + 3) \\ E(x) &= 25x^2 - 30x + 9 - 10x^2 + 16x - 6 \\ &\boxed{E(x) = 15x^2 - 14x + 3} \quad \text{(Forme développée)} \end{aligned}$$

2. **Factorisation :** On remarque le facteur commun $(5x-3)$.

$$E(x) = (5x-3)(5x-3) - 2(x-1)(5x-3)$$
$$E(x) = (5x-3)\left[(5x-3) - 2(x-1)\right]$$
$$E(x) = (5x-3)(5x-3-2x+2)$$
$$\boxed{E(x) = (5x-3)(3x-1)} \quad \text{(Forme factorisée)}$$

3. **Résolutions d'équations :**

   a) $E(x) = 0$: On utilise la **forme factorisée**.

$$(5x-3)(3x-1) = 0$$

$5x - 3 = 0 \iff x = 3/5$ ou $3x - 1 = 0 \iff x = 1/3$.

$$\boxed{S = \left\{\frac{1}{3} ; \frac{3}{5}\right\}}$$

   b) $E(x) = 3$: On utilise la **forme développée**.

$$15x^2 - 14x + 3 = 3$$
$$15x^2 - 14x = 0 \quad \text{(On soustrait 3 des deux côtés)}$$
$$x(15x-14) = 0 \quad \text{(Factorisation par } x)$$

$x = 0$ ou $15x - 14 = 0 \iff x = 14/15$.

$$\boxed{S = \left\{0 ; \frac{14}{15}\right\}}$$

Exercice 3 : Calcul numérique, Algorithme et Géométrie

1. **Écriture scientifique :** $B = 2021 \times 10^{-2020} = 2,021 \times 10^3 \times 10^{-2020} = \boxed{2,021 \times 10^{-2017}}$.

2. **Algorithme :**

   a) **Calculs :**

   - Avec -1 : Ajouter 2 $\to 1$. Triple $\to 3$. Soustraire $(-1)^2 \to 3 - 1 = \mathbf{2}$.
   - Avec $2/3$: Ajouter 2 $\to 8/3$. Triple $\to 8$. Soustraire $(2/3)^2 = 4/9 \to 8 - 4/9 = 72/9 - 4/9 = \mathbf{68/9}$.
   - Avec $-\sqrt{5}$: Ajouter 2 $\to -\sqrt{5} + 2$. Triple $\to 3(-\sqrt{5} + 2) = -3\sqrt{5} + 6$. Soustraire $(-\sqrt{5})^2 = 5 \to -3\sqrt{5} + 6 - 5 = \mathbf{1 - 3\sqrt{5}}$.

   b) **Expression $f(x)$:** Soit x le nombre.

   1. $x + 2$

2. $3(x+2)$
3. $3(x+2)-x^2$

$$f(x)=3x+6-x^2 \iff \boxed{f(x)=-x^2+3x+6}$$

c) **Résoudre** $-2x^2+5=0$ **:**

$$-2x^2=-5 \iff x^2=\frac{-5}{-2}=2,5$$

Deux solutions : $\sqrt{2,5}$ et $-\sqrt{2,5}$.

$$\boxed{S=\{-\sqrt{2,5}\,;\,\sqrt{2,5}\}}$$

3. **Simplification de radicaux :** $D=-3\sqrt{28}+5\sqrt{252}$. On cherche à faire apparaître $\sqrt{7}$.

$$\sqrt{28}=\sqrt{4\times 7}=2\sqrt{7} \quad \text{et} \quad \sqrt{252}=\sqrt{36\times 7}=6\sqrt{7}$$

$$D=-3(2\sqrt{7})+5(6\sqrt{7})=-6\sqrt{7}+30\sqrt{7}=\boxed{24\sqrt{7}}$$

4. **Géométrie :** Simplifions d'abord les coordonnées : $A(\sqrt{25\times 7}\,;\,\sqrt{9\times 7}) \implies A(5\sqrt{7}\,;\,3\sqrt{7})$. $B(\sqrt{4\times 7}\,;\,-\sqrt{7}) \implies B(2\sqrt{7}\,;\,-\sqrt{7})$.

- **Milieu** M **de** $[AB]$ **:** $x_M=\dfrac{5\sqrt{7}+2\sqrt{7}}{2}=\dfrac{7\sqrt{7}}{2}$ et $y_M=\dfrac{3\sqrt{7}+(-\sqrt{7})}{2}=\dfrac{2\sqrt{7}}{2}=\sqrt{7}$.

$$\boxed{M\left(\frac{7\sqrt{7}}{2}\,;\,\sqrt{7}\right)}$$

- **Longueur** AB **:** $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

$$AB=\sqrt{(2\sqrt{7}-5\sqrt{7})^2+(-\sqrt{7}-3\sqrt{7})^2}$$
$$AB=\sqrt{(-3\sqrt{7})^2+(-4\sqrt{7})^2}$$
$$AB=\sqrt{9\times 7+16\times 7}=\sqrt{63+112}=\sqrt{175}=\boxed{5\sqrt{7}}$$

5. **Calculs sur radicaux :**

a) $E=(5\sqrt{3}-3\sqrt{5})^2=(5\sqrt{3})^2-2(5\sqrt{3})(3\sqrt{5})+(3\sqrt{5})^2$ $E=25\times 3-30\sqrt{15}+9\times 5=75-30\sqrt{15}+45=\boxed{120-30\sqrt{15}}$.

b) On cherche $\sqrt{F}=\sqrt{120-30\sqrt{15}}$. D'après la question précédente, $F=(5\sqrt{3}-3\sqrt{5})^2$.

Donc $\sqrt{F}=\sqrt{(5\sqrt{3}-3\sqrt{5})^2}=|5\sqrt{3}-3\sqrt{5}|$.

Comparons les carrés pour connaître le signe : $(5\sqrt{3})^2=75$ et $(3\sqrt{5})^2=45$.

Comme $75 > 45$, alors $5\sqrt{3} > 3\sqrt{5}$, l'expression est positive.

$$\boxed{\sqrt{F} = 5\sqrt{3} - 3\sqrt{5}}$$

6. **Montrer les égalités :**
   - Pour la première, on développe le carré du membre de gauche :

     Soit $A = \left(\sqrt{6-2\sqrt{5}} - \sqrt{6+2\sqrt{5}}\right)^2$. $A = (6-2\sqrt{5}) - 2\sqrt{(6-2\sqrt{5})(6+2\sqrt{5})} + (6+2\sqrt{5})$. $A = 12 - 2\sqrt{6^2 - (2\sqrt{5})^2} = 12 - 2\sqrt{36-20} = 12 - 2\sqrt{16}$. $A = 12 - 2(4) = 12 - 8 = 4$.

     L'égalité est vraie.
   - Pour la seconde, on réduit le membre de droite au même dénominateur :

     Rappel : $(x+1)(2x-3) = 2x^2 - 3x + 2x - 3 = 2x^2 - x - 3$.

     C'est le dénominateur de gauche !

$$\begin{aligned}\text{Droite} &= \frac{(2x+3)(2x-3)}{(x+1)(2x-3)} - \frac{4x(x+1)}{(x+1)(2x-3)}\\ &= \frac{(4x^2-9) - (4x^2+4x)}{2x^2-x-3}\\ &= \frac{4x^2 - 9 - 4x^2 - 4x}{2x^2-x-3}\\ &= \frac{-4x-9}{2x^2-x-3} = \text{Gauche}\end{aligned}$$

     L'égalité est vérifiée.

Exercice 4 : Problèmes

1. **Périmètre du carré :** Le côté mesure $c = 2x - 7$. Le périmètre vaut $4 \times c$.

$$4(2x-7) = 6 \iff 2x - 7 = 1,5 \iff 2x = 8,5 \iff x = 4,25$$

   On vérifie que la longueur est positive : $2(4,25) - 7 = 8,5 - 7 = 1,5 > 0$. **Le périmètre vaut 6 pour $x = 4,25$.**

2. **Boulangerie :** Soit n le nombre de croissants et n le nombre de chocolatines. Coût total : $1,10n + 1,35n = 2,45n$. On veut $2,45n \leqslant 30$.

$$n \leqslant \frac{30}{2,45} \approx 12,24$$

   Comme n est entier, Roman peut acheter au maximum 12 croissants et 12 chocolatines. Nombre total de viennoiseries : $12 + 12 = \mathbf{24}$.

3. **Problème d'âges :** Soit x le nombre d'années écoulées. Âge du père : $41 + x$. Somme des enfants :

$(5 + x) + (9 + x) + (13 + x)$.

$$41 + x = 27 + 3x$$

$$41 - 27 = 3x - x$$

$$14 = 2x$$

$$x = 7$$

Dans 7 ans, le père aura 48 ans et la somme des enfants sera $12 + 16 + 20 = 48$.