

Exercice 1 : Une parabole sous toutes ses formes

6 points

- 1) $f(x) = 0 \iff -2(x-1)(x-5) = 0 \iff x-1 = 0$ ou $x-5 = 0$ (un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul). Les racines de f sont 1 et 5. On le lit aussi sur la courbe, qui coupe l'axe des abscisses en 1 et en 5.
- 2) En développant, le coefficient de x^2 est $a = -2 < 0$: la parabole est tournée vers le bas (ce que confirme la courbe).
- 3) L'axe de symétrie passe au milieu des deux racines : $x = \frac{1+5}{2} = 3$, donc axe de symétrie : $x = 3$.
Le sommet a pour abscisse 3 et pour ordonnée $f(3) = -2 \times (3-1)(3-5) = -2 \times 2 \times (-2) = 8$: $S(3; 8)$.
- 4) $f(x) = -2(x-1)(x-5) = -2(x^2 - 5x - x + 5) = -2(x^2 - 6x + 5) =$ $-2x^2 + 12x - 10$.
- 5) On utilise la forme factorisée : $-2 < 0$, $x-1$ s'annule en 1, $x-5$ s'annule en 5.

x	0	1	5	6
-2	—	—	—	—
$x-1$	—	0	+	+
$x-5$	—	—	0	+
$f(x)$	—	0	+	—

Donc $f(x) < 0$ sur $[0; 1[$ et $]5; 6]$, $f(x) > 0$ sur $]1; 5[$, et $f(x) = 0$ en 1 et 5.

- 6) a. On trace la droite horizontale $y = 6$: elle coupe $\mathcal{C}_f$ en deux points d'abscisses 2 et 4. Graphiquement, $S = \{2; 4\}$.
- b. $-2(x-2)(x-4) = -2(x^2 - 4x - 2x + 8) = -2x^2 + 12x - 16 = (-2x^2 + 12x - 10) - 6 = f(x) - 6$.
Alors $f(x) = 6 \iff f(x) - 6 = 0 \iff -2(x-2)(x-4) = 0 \iff x = 2$ ou $x = 4$: on retrouve $S = \{2; 4\}$.

Exercice 2 : Le jet d'eau

6 points

- 1) $h(0) = -0,5 \times 0 \times (0-6) = 0$ et $h(6) = -0,5 \times 6 \times (6-6) = 0$. $h(0) = h(6) = 0$: le jet part du sol au niveau de la buse ($x = 0$) et retombe au sol à 6 m de la buse ($x = 6$).
- 2) h est une fonction polynôme de degré 2 dont les racines sont 0 et 6 ; le coefficient de x^2 vaut $-0,5 < 0$, donc la parabole est tournée vers le bas et le maximum est atteint sur l'axe de symétrie, au milieu des racines : $x = \frac{0+6}{2} = 3$.
Hauteur maximale : $h(3) = -0,5 \times 3 \times (3-6) = -0,5 \times 3 \times (-3) =$ $4,5 \text{ m}$.
- 3) h est croissante sur $[0; 3]$ puis décroissante sur $[3; 6]$:

x	0	3	6
$h(x)$	0	4,5	0

- 4) a. D'une part $h(x) - 4 = -0,5x(x-6) - 4 = -0,5x^2 + 3x - 4$. D'autre part $-0,5(x-2)(x-4) = -0,5(x^2 - 6x + 8) = -0,5x^2 + 3x - 4$. Les deux expressions sont égales :

$$h(x) - 4 = -0,5(x-2)(x-4)$$

- b. Le jet dépasse 4 m lorsque $h(x) > 4$, c'est-à-dire $h(x) - 4 > 0$, soit $-0,5(x-2)(x-4) > 0$.

x	0	2	4	6
$-0,5$	—	—	—	—
$x - 2$	—	0	+	+
$x - 4$	—	—	0	+
$h(x) - 4$	—	0	+	—

Le jet dépasse 4 m de hauteur pour $x \in]2; 4[$, c'est-à-dire entre 2 m et 4 m de la buse (il atteint exactement 4 m en $x = 2$ et $x = 4$).

Exercice 3 : Degré 3 et racine cubique

8 points

Partie A.

- 1) $g(1) = 0,5 - 1 - 2,5 + 3 = 0$, donc 1 est racine de g .
 $g(-2) = 0,5 \times (-8) - 4 - 2,5 \times (-2) + 3 = -4 - 4 + 5 + 3 = 0$ et $g(3) = 0,5 \times 27 - 9 - 7,5 + 3 = 13,5 - 9 - 7,5 + 3 = 0$: $-2, 1$ et 3 sont racines de g .

- 2) On développe le membre de droite : $(x+2)(x-1) = x^2 - x + 2x - 2 = x^2 + x - 2$, puis

$$(x^2 + x - 2)(x-3) = x^3 - 3x^2 + x^2 - 3x - 2x + 6 = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

et enfin $0,5(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) = 0,5x^3 - x^2 - 2,5x + 3 = g(x)$. Donc $g(x) = 0,5(x+2)(x-1)(x-3)$.
 Cette forme factorisée confirme que les racines de g sont exactement $-2, 1$ et 3 : un polynôme de degré 3 n'en a pas d'autre.

- 3) Le facteur $0,5$ est positif ; $x+2$ s'annule en -2 , $x-1$ en 1 , $x-3$ en 3 .

x	-3	-2	1	3	4
$x + 2$	-	0	+	+	+
$x - 1$	-	-	0	+	+
$x - 3$	-	-	-	0	+
$g(x)$	-	0	+	0	+

4) D'après le tableau, $g(x) < 0$ pour $x \in [-3; -2[\cup]1; 3[$.

Partie B.

- 5) **Faux.** L'équation $x^2 = 9$ admet deux solutions, 3 et -3, car $3^2 = 9$ et $(-3)^2 = 9$. (C'est l'équation $x^3 = c$ qui n'a qu'une seule solution réelle.)
- 6) **Vrai.** Si a est l'arête (en dm), le volume vaut a^3 ; or $4,5^3 = 4,5 \times 4,5 \times 4,5 = 20,25 \times 4,5 = 91,125$, donc $a = \sqrt[3]{91,125} = 4,5$ dm.
- 7) **Vrai.** $3(x - 2)(x + 2) = 3(x^2 - 4) = 3x^2 - 12 = p(x)$, et cette forme factorisée montre que p s'annule exactement pour $x = 2$ et $x = -2$: deux racines. (Autre point de vue : $p(x) = 0 \iff x^2 = 4 \iff x = 2$ ou $x = -2$.)